# 类域论——代数数论专题 IV

September 30, 2022

## 0、前言

所谓二次互反律，即研究素数在 $\mathbb{Q}$ 的二次扩张中的分裂情况，换句话说即研究同态 $\mathbb{Q}^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 值得庆幸的是这里的次数比较小，因而 Galois 群太简单，所以直接使用初等数论就能得到结论. 一般来讲，我们会问是否存在合理的同态 $\mathbb{Q}^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}/\mathbb{Q})$，也就是是否能用 $\mathbb{Q}$ 自身的算术性质来确定它的所有 Galois 扩张？但这太困难了，这个坑直接通向 Langlands 纲领. 不过稍微放宽一点，我们可以确定所有的 Abel 扩张——通过局部域的特殊乘法子群或者整体域 Idele 群的特殊子群. 这是类域论的核心问题，也是本文将要介绍的内容.

类域论的证明有很多方法，许多学科在这里展示自己的威力，例如表示论、解析数论、同调代数、代数拓扑、代数几何等. 本文只选取其中较为简洁的一种思路——即上同调的语言，这也是 Tate 在上世纪六十年代的工作. 关于类域论的证明大都十分巧妙且尤其复杂，事无巨细地记录是没有必要的，因此本文不会详细给出所有证明，所有的篇幅只不过是为了帮助理解而已.

本文是 2021 年春季学期首师大数科院讨论班《类域论与互反律》的精简版讲义，除笔者外还有康天赐、吴兴楠等人对本文作出了贡献，笔者在此表示感谢. 笔者承认这份讲义写的非常粗糙，错误颇多，恳请指正！

**参考文献**

[1] J. Milne. Class Field Theory. http://www.jmilne.org/math/.

[2] D. Harari. Galois Cohomology and Class Field Theory. Springer.

[3] J. Neukirch. Algebraic Number Theory. Springer.

[4] J. Weinstein. Reciprocity Laws and Galois Representations - Recent Breakthroughs.

[5] S. Manber. The Brauer-Manin Obstruction.

[6] R. Emily. Lubin-Tate Formal Groups and Local Class Field Theory.

[7] A. Weil. Basic Number Theory(3ed). Springer-Verlag.

[8] K. Kato, N. Kurokawa, T. Saito. Number Theory 1: Fermat's Dream. American Mathematical Society.

朱子阳[1]，2022 年 2 月于首都师范大学

[1] 邮箱 zhuziyang@cnu.edu.cn

# 1、Tate 同调

类域论的构建有许多方式，其中最方便的就是采用群上同调的语言，它会导出许多巧妙的结论. 本节主要介绍这种工具，在不影响理解的前提下会略去证明.

**定义 1.1($G$-模)** 设 $G$ 是群，称 Abel 群 $M$ 连同 $G$ 的一个作用 $G\times M\to M,(g,m)\mapsto gm$ 为一个**$G$-模**，如果该作用满足 $g(m+m')=gm+gm';(gg')(m)=g(g'm);1m=m$. 两个 $G$-模间的映射 $f:M\to N$ 称为**$G$-同态**，如果 $f(m+m')=f(m)+f(m');f(g(m))=g(f(m))$. 由所有 $G$-同态 $M\to N$ 作成的集合记为 $\mathrm{Hom}_G(M,N)$，由所有 $G$-模作成的范畴记为 $\mathsf{Mod}(G)$.

**注意 1.2** (1) 任给群 $G$，规定 $G$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的作用为平凡作用：$gn=n$. 此时 $\mathbb{Z}$ 是一个 $G$-模.

(2) 设 $G$ 是群，定义群代数 $\mathbb{Z}[G]:=\left\{\sum_{g\in G}^{<\infty}n_g g:n_g\in\mathbb{Z}\right\}$，其上配备自然的加法、乘法和数乘后成为一个 $\mathbb{Z}$-代数 (由于 $G$ 不一定交换，故该代数不一定是交换代数！). 不难发现范畴 $\mathsf{Mod}(G)$ 与环上的模范畴 $\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}[G])$ 等价，因此 $G$-模范畴是 Abel 范畴且有足够多内射、投射对象. 至此我们便可放心地施展同调代数.

(3) 设 $M,N\in\mathsf{Mod}(G)$，在集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N):=\{f:M\to N\text{是 Abel 群同态}\}$ 上定义运算 $(f+f')(m):=f(m)+f'(m);(g(f))(m):=g(f(g^{-1}m))$ 之后成为一个 $G$- 模.

(4) 设 $H\subseteq G$ 是群，$N$ 是 $H$-模. 定义正合函子 $\mathrm{Ind}_H^G:\mathsf{Mod}(H)\to\mathsf{Mod}(G),N\mapsto\mathrm{Ind}_H^G(N):=\left\{\text{映射}G\xrightarrow{f}N:\forall h\in H,f(hg)=hf(g)\right\}$，其上的模结构定义为 $(f+f')(x):=f(x)+f'(x);(g(f))(x):=f(xg)$. 通常称 $\mathrm{Ind}_H^G(N)$ 为 $N$ 的**诱导模** (Induced Modules). 若还有 $G$-模 $M$，则由表示论知 $\mathrm{Hom}_G(M,\mathrm{Ind}_H^G(N))\cong\mathrm{Hom}_H(M,N)$. 称 $G$-模 $M$ **可诱导**，如果存在 Abel 群 $M_0$ 使得 $M\cong\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G(M_0)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],M_0)$. 特别地，若 $G$ 有限，则有 $G$-模同构 $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G(M_0)\cong\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}M_0\cong\bigoplus_{g\in G}gM_0,[f:G\to M_0]\mapsto\sum_{g\in G}g\otimes f(g^{-1})\mapsto\left(f(g^{-1})\right)$.

**定义 1.3(右导出函子)** 设 $M$ 是 $G$-模. 定义函子 $(\cdot)^G:\mathsf{Mod}(G)\to\mathsf{Ab},M\mapsto M^G:=\{m\in M:\forall g\in G,gm=m\}$. 由于 $(\cdot)^G$ 对应到 $\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}[G])$ 中与 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\cdot)$ 等效(或对应到 $\mathsf{Mod}(G)$ 中与 $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},\cdot)$ 等效)，故该函子左正合，其**右导出函子**$R^i((\cdot)^G):\mathsf{Mod}(G)\to\mathsf{Ab}$ 记作 $H^i(G,\cdot)$，称为群 $G$ 的**第 $i$ 个 $(\cdot)$-系数上同调群**. 显然 $H^0(G,M)=M^G$.

**定理 1.4(长正合列)** 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 $\mathsf{Mod}(G)$ 中的短正合列，则在 $\mathsf{Ab}$ 中有长正合列 $0\to H^0(G,M')\to H^0(G,M)\to H^0(G,M'')\to H^1(G,M')\to H^1(G,M)\to H^1(G,M'')\to\cdots$.

而关于诱导模的上同调，有如下重要结论：

**定理 1.5(Shapiro)** 设 $H\subseteq G$ 是群，$N$ 是 $H$- 模，则对任意 $i\geq 0$ 有 $H^i(G,\mathrm{Ind}_H^G(N))\cong H^i(H,N)$. 特别地，若 $G$-模 $M$ 可诱导，则对任意 $i>0$ 有 $H^i(G,M)=0$.

**证明** 当 $i=0$ 时该同构由 $N^H\cong\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z},N)\cong\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},\mathrm{Ind}_H^G(N))\cong\mathrm{Ind}_H^G(N)^G$ 得到；当 $i>0$ 时设有内射分解 $0\to N\to I^\bullet$，由于 $\mathrm{Ind}_H^G$ 是正合函子且保持内射对象，从而 $H^i(G,\mathrm{Ind}_H^G(N))=H^i\left((\mathrm{Ind}_H^G(I^\bullet))^G\right)=H^i((I^\bullet)^H)=H^i(H,N)$.■

直接用定义 1.3 计算上同调较为困难. 此处我们把 $M$ 的内射分解换成 $\mathbb{Z}\in\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}[G])$ 的自由 (投射) 分解关于系数 $M$ 的对偶，其中的元素即所谓的**上链** (Cochains)，用它可以具体地计算上同调群：

**定理 1.6** (1) 定义自由 Abel 群 $P_i:=\bigoplus_{(g_0,\cdots,g_i)\in G^{i+1}}\mathbb{Z}(g_0,\cdots,g_i),i\geq 0$，配备 $G$ 的作用 $g(g_0,\cdots,g_i):=(gg_0,\cdots,gg_i)$ 之后它便是一个自由 $\mathbb{Z}[G]$-模. 若定义 $G$-同态 (即边缘算子) 为 $d_i:P_i\to P_{i-1},(g_0,\cdots,g_i)\mapsto\sum_{k=0}^i(-1)^k(g_0,\cdots,\widehat{g}_k,\cdots,g_i)$，则 $\cdots\to P_i\xrightarrow{d_i}P_{i-1}\to\cdots\to P_0\to\mathbb{Z}\to 0$ 是 $\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}[G])$ 中的自由分解. 因此对任意 $G$-模 $M$ 均有 Abel 群同构 $H^i(G,M)\cong H^i(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet,M))$.

(2) 对任意 $G$-模 $M$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_i,M)=\left\{G^{i+1}\xrightarrow{\varphi}M:\varphi(gg_0,\cdots,gg_i)=g(\varphi(g_0,\cdots,g_i))\right\}\xrightarrow{\sim}C^i(G,M):=\left\{\begin{smallmatrix}0, & i<0\\ M, & i=0\\ \{\varphi:G^i\to M\}, & i\geq 1\end{smallmatrix}\right.,\varphi\longmapsto\left[(g_1,\cdots,g_i)\mapsto\varphi(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1\cdots g_i)\right]$. 相应的边缘算子变为

$$\widetilde{d^i}:C^i(G,M)\to C^{i+1}(G,M),\varphi\mapsto\left(\widetilde{d^i}\varphi:(g_1,\cdots,g_{i+1})\mapsto\begin{bmatrix}g_1\varphi(g_2,\cdots,g_{i+1})\\ +\sum_{k=1}^i(-1)^k\varphi(g_1,\cdots,g_kg_{k+1},\cdots,g_{i+1})\\ +(-1)^{i+1}\varphi(g_1,\cdots,g_i)\end{bmatrix}\right).$$

此时 $H^i(G,M)=\ker(\widetilde{d^i})/\operatorname{Im}(\widetilde{d^{i-1}})$.

**例 1.7** 设 $L/K$ 是有限 Galois 扩张，则：

(1) 对任意 $i>0$，$H^i(\mathrm{Gal}(L/K),L)=0$. 这是因为正规基定理给出 $\mathrm{Gal}(L/K)$-模同构 $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{\mathrm{Gal}(L/K)}(K)\cong K[\mathrm{Gal}(L/K)]\cong L$，从而由定理 1.5 有 $H^i(\mathrm{Gal}(L/K),L)\cong H^i(\{1\},K),i\geq 0$.

(2)$H^1(\mathrm{Gal}(L/K),L^\times)=0$. 该结论可由定理 1.6 的计算得到：对任意 $\varphi\in\ker(\widetilde{d}^1)$，有 $\varphi(\tau\sigma)=\varphi(\tau)\cdot\tau\varphi(\sigma)$. 选取合适的 $a\in L^\times$ 使 $b:=\sum_\sigma\varphi(\sigma)\cdot\sigma a\neq 0$，则 $\tau b=\sum_\sigma\tau\varphi(\sigma)\cdot\tau\sigma a=\sum_\sigma\varphi(\tau)^{-1}\varphi(\tau\sigma)\cdot\tau\sigma a=\varphi(\tau)^{-1}b$，即 $\varphi(\tau)=\frac{\tau(b^{-1})}{b^{-1}}$，因此 $\varphi\in\mathrm{Im}(\widetilde{d}^0)$.

利用上同调的函子性可以定义一些重要的映射：

**定义 1.8** 设 $M$ 是 $G$-模，$M'$ 是 $G'$-模，$\alpha:G'\to G$ 是群同态，$\beta:M\to M'$ 是 Abel 群同态. 称 $(\alpha,\beta)$ **兼容**，如果 $g'(\beta(m))=\beta\big((\alpha(g'))(m)\big)$. 此时由函子性知 $(\alpha,\beta)$ 诱导 Abel 群同态 $H^i(G,M)\to H^i(G',M'),[f:G^i\to M]\mapsto[\beta\circ f\circ(\alpha,\cdots,\alpha)]$.

**例 1.9** (1) 设 $H\subseteq G$ 是群，$N$ 是 $H$-模. 易证 $\Big(H\hookrightarrow G,\mathrm{Ind}_H^G(N)\xrightarrow{f\mapsto f(1_G)}N\Big)$ 兼容，此时上述诱导同态即定理 1.5 中的同构.

(2) 设 $H\subseteq G$ 是群，$M$ 是 $G$-模，则 $(H\hookrightarrow G,M=M)$ 兼容，记诱导同态 $\mathrm{Res}:H^i(G,M)\to H^i(H,M)$. 该同态还可由 $G$- 同态 $M\to\mathrm{Ind}_H^G(M),m\mapsto[g\mapsto gm]$ 诱导：$H^i(G,M)\to H^i(G,\mathrm{Ind}_H^G(M))\xrightarrow{\sim}H^i(H,M)$.

(3) 设 $H$ 是群 $G$ 的正规子群，$M$ 是 $G$-模，则 $(G\twoheadrightarrow G/H,M^H\hookrightarrow M)$ 兼容，称此时的诱导同态为**膨胀** (Inflation) 同态 $\mathrm{Inf}:H^i(G/H,M^H)\to H^i(G,M)$.

(4) 设 $H$ 是 $G$ 的有限指数子群，则 $G=\bigcup_{s\in G/H}sH$. 设 $M$ 是 $G$-模，定义 Abel 群同态 $\mathrm{Nm}_{G/H}:M^H\to M^G,m\mapsto\sum_{s\in G/H}sm$. 一般地，考虑 $G$-同态 $\mathrm{Ind}_H^G(M)\to M,f\mapsto\sum_{s\in G/H}sf(s^{-1})$，则由函子性和定理 1.5 可以定义 $\mathrm{Cor}:H^i(H,M)\xrightarrow{\sim}H^i(G,\mathrm{Ind}_H^G(M))\to H^i(G,M)$.

(5) 设 $H$ 是 $G$ 的有限指数子群，则 $\mathrm{Cor}\circ\mathrm{Res}:H^i(G,M)\to H^i(G,M)$ 由 $G$-同态 $M\to M,m\mapsto\sum_{s\in G/H}m$ 诱导，因而 $\mathrm{Cor}\circ\mathrm{Res}=[G:H]$. 特别地，若 $G$ 是有限群，则对任意 $i>0$ 有 $|G|\cdot H^i(G,M)=\mathrm{Cor}\circ\mathrm{Res}(H^i(G,M))=\mathrm{Cor}(H^i(\{1\},M))=0$.

(6) 设 $H$ 是 $G$ 的正规子群，$M$ 是 $G$-模. 给定正整数 $i$，若对任意 $0<k<i$ 均有 $H^i(H,M)=0$，则利用 Hochschild-Serre 谱序列 $H^r(G/H,H^s(H,M))\Rightarrow H^{r+s}(G,M)$ 可得 $0\to H^i(G/H,M^H)\xrightarrow{\mathrm{Inf}}H^i(G,M)\xrightarrow{\mathrm{Res}}H^i(H,M)$ 是正合序列. 例如若 $K\subseteq L\subseteq E$ 是有限 Galois 扩张，则例 1.7(2) 告诉我们 $H^1(\mathrm{Gal}(E/L),E^\times)=0$，因此有正合列 $0\to H^2(\mathrm{Gal}(L/K),L^\times)\to H^2(\mathrm{Gal}(E/K),E^\times)\to H^2(\mathrm{Gal}(E/L),E^\times)$.

可以定义上同调层面上的“乘法运算”使之成为一个环，具体操作如下：

**定理 1.10(杯积)** 设 $G$ 是群，$M,N$ 均是 $G$-模，则 Abel 群 $M\otimes_{\mathbb{Z}}N$ 配备运算 $g(m\otimes n):=gm\otimes gn$ 之后也是一个 $G$-模. 根据定理 1.6(2) 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet,M)$ 的层面上考虑双线性映射 $\cup:C^r(G,M)\times C^s(G,N)\to C^{r+s}(G,M\otimes_{\mathbb{Z}}N),(a\cup b)(g_0,\cdots,g_{r+s}):=a(g_0,\cdots,g_r)\otimes b(g_r,\cdots,g_{r+s})$，它诱导双线性映射 (称为**杯积**，Cup Product) $\cup:H^r(G,M)\times H^s(G,N)\to H^{r+s}(G,M\otimes_{\mathbb{Z}}N),r,s\geq 0$. 杯积具有如下性质：

(1) 当 $r=s=0$ 时 $\cup$ 退化为 $M^G\times N^G\to(M\otimes_{\mathbb{Z}}N)^G,a\cup b=a\otimes b$;

(2)$d(a\cup b)=(da)\cup b+(-1)^r(a\cup db)$;

(3) 若 $\mathsf{Mod}(G)$ 中的序列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 满足 $0\to M'\otimes_{\mathbb{Z}}N\to M\otimes_{\mathbb{Z}}N\to M''\otimes_{\mathbb{Z}}N\to 0$，记 $\delta$ 为适当的连接同态，则有 $(\delta a'')\cup b=\delta(a''\cup b),a''\in H^r(G,M''),b\in H^s(G,N)$.

(4) 若 $\mathsf{Mod}(G)$ 中的序列 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 满足 $0\to M\otimes_{\mathbb{Z}}N'\to M\otimes_{\mathbb{Z}}N\to M\otimes_{\mathbb{Z}}N''\to 0$，记 $\delta$ 为适当的连接同态，则有 $a\cup(\delta b'')=(-1)^r\delta(a\cup b''),a\in H^r(G,M),b''\in H^s(G,N'')$.

(5)$(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$；$a\cup b=(-1)^{rs}b\cup a$；$\mathrm{Res}(a\cup b)=\mathrm{Res}(a)\cup\mathrm{Res}(b)$；$\mathrm{Cor}(a\cup\mathrm{Res}(b))=\mathrm{Cor}(a)\cup b$.

接下来介绍同调，它与上同调一起在 Tate 修正版的群同调中出现.

**定义 1.11(左导出函子)** 设 $M$ 是 $G$-模. 定义函子 $(\cdot)_G:\mathsf{Mod}(G)\to\mathsf{Ab},M\mapsto M_G:=M/\langle gm-m\rangle$. 不难验证该函子右正合，其**左导出函子**$L^i((\cdot)_G):\mathsf{Mod}(G)\to\mathsf{Ab}$ 记作 $H_i(G,\cdot)$，称为群 $G$ 的**第 $i$ 个 $(\cdot)$-系数同调群**. 可以证明 $H_0(G,M)=M_G,H_1(G,\mathbb{Z})=G^{\mathrm{ab}}$.

**定理 1.12(长正合列)** 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 $\mathsf{Mod}(G)$ 中的短正合列，则在 $\mathsf{Ab}$ 中有长正合列 $\cdots\to H_1(G,M')\to H_1(G,M)\to H_1(G,M'')\to H_0(G,M')\to H_0(G,M)\to H_0(G,M'')\to 0$.

同调也有类似于定理 1.6 的计算方式，此处不再赘述. 本节最主要的目标是介绍 Tate 的修正：

**定义 1.13(Tate)** 设 $G$ 是**有限群**，$M$ 是 $G$- 模. 考虑群同态 $\mathrm{Nm}_{G/\{1\}}:M\to M$，易见 $\ker(\mathrm{Nm}_{G/\{1\}})\supseteq$

$\langle gm-m\rangle, \mathrm{Im}(\mathrm{Nm}_{G/\{1\}})\subseteq M^G$，此时有行正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[r, "\mathrm{Nm}_{G/\{1\}}"] \arrow[d] & M & & \\
0 \arrow[r] & \frac{\ker(\mathrm{Nm}_{G/\{1\}})}{\langle gm-m\rangle} \arrow[r] & H_0(G,M) \arrow[r] & H^0(G,M) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \frac{M^G}{\mathrm{Im}(\mathrm{Nm}_{G/\{1\}})} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

现定义 **Tate 同调群**$H_T^i(G,M):=\begin{cases} H^i(G,M), & i>0 \\ M^G/\mathrm{Im}(\mathrm{Nm}_{G/\{1\}}), & i=0 \\ \ker(\mathrm{Nm}_{G/\{1\}})/\langle gm-m\rangle, & i=-1 \\ H_{-i-1}(G,M), & i<-1 \end{cases}$.

关于 Tate 同调群有如下结论：

**定理 1.14** 设 $G$ 是有限群，则：

(1) 若 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 $\mathsf{Mod}(G)$ 中的短正合列，则蛇引理给出超长正合列 $\cdots\to H_T^i(G,M')\to H_T^i(G,M)\to H_T^i(G,M'')\to H_T^{i+1}(G,M')\to\cdots$.

(2) 若 $G$-模 $M$ 可诱导，则对任意 $i\in\mathbb{Z}$ 有 $H_T^i(G,M)=0$.

(3) 规定 $G$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的作用平凡使其成为 $G$-模，则对任意 $i\in\mathbb{Z}$ 有 $H_T^i(G,\mathbb{Q})=0$.

(4)$H_T^0(G,\mathbb{Z})=\frac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}}, H^1(G,\mathbb{Z})=0, H^2(G,\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(5) 若 $G$ 还是循环群，则对任意 $G$-模 $M$ 以及任意 $i\in\mathbb{Z}$ 有同构 $H_T^i(G,M)\cong H_T^{i+2}(G,M)$.

(6) 设 $M$ 是 $G$-模. 若任取 $G$ 的子群 $H$ 均有 $H^1(H,M)=H^2(H,M)=0$，则对任意 $i\in\mathbb{Z}$ 有 $H_T^i(G,M)=0$.

由于周期性 (定理 1.14.5) 的存在，很自然地可以给出如下定义：

**定义 1.15(Herbrand)** 设 $G$ 是**有限循环群**，$M$ 是 $G$-模. 定义 $M$ 的 **Herbrand 商**为 $h(M):=\frac{|H_T^0(G,M)|}{|H_T^1(G,M)|}$.

**命题 1.16** 设 $G$ 是有限循环群，则：

(1) 若有 $G$-模的正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$，则 $h(M)=h(M')h(M'')$.

(2) 设 $M$ 是有限 $G$-模，则 $h(M)=1$.

(3) 设有 $G$-同态 $f:M\to N$ 且 $\ker(f), N/\mathrm{Im}(f)$ 均有限，则 $h(M)=h(N)$.

**证明** (1) 由定理 1.14(1) 再结合正合列的性质得到；(2) 正合列 $0\to M^G\to M\xrightarrow{m\mapsto[gm-m]}M\to M_G\to 0$ 给出 $|M^G|=|M_G|$(这里 $\langle g\rangle=G$)，而正合列 $0\to H_T^{-1}(G,M)\to M_G\xrightarrow{\mathrm{Nm}_{G/\{1\}}}M^G\to H_T^0(G,M)\to 0$ 给出 $|H_T^{-1}(G,M)|=|H_T^0(G,M)|$；(3) 由 (2) 立得.■

接下来是本节中最巧妙的定理 (证明当然很复杂)，类域论的构建恰好需要满足该定理的条件. 在这个定理中 Tate 把 Galois 上同调理论运用到几乎极致.

**定理 1.17(Tate)** 设群 $G$ 有限，$M$ 是 $G$-模. 若任意 $G$ 的子群 $H$ 均满足 $H^1(H,M)=0$ 且 $H^2(H,M)\cong\frac{\mathbb{Z}}{|H|\mathbb{Z}}$，则 $H_T^i(G,\mathbb{Z})\cong H_T^{i+2}(G,M), i\in\mathbb{Z}$.

由于类域论关心的都是 Galois 群，所以我们应特别留意 Galois 群的上同调理论. 而 Galois 群都带有 Profinite 拓扑，因此连续性不可忽略，故定义上同调时需要考虑拓扑的影响. 关于这些同调论的细节，我们以如下命题总结：

**命题 1.18** 设 $L/K$ 是 Galois 扩张 (次数可无限)，其 Galois 群 $G$ 配备 Profinite 拓扑. 设 $M$ 是一个配备离散拓扑的 Abel 群，约定一个连续作用 $G\times M\to M$ 使 $M$ 成为一个**$G$-模**(一个判定准则是：对任意 $m\in M$，$[G:\mathrm{Stab}_G(m)]<\infty$). 现定义链复形 $\left(C_c^i(G,M):=\begin{cases} 0, & i<0 \\ M, & i=0 \\ \{\varphi:G^i\to M\text{连续}\}, & i\geq 1\end{cases}, d^i\text{如定理 1.6(2)}\right)$，记该复形的第 $i$ 个上同调群为 $H_c^i(G,M):=\ker(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1})$，称其为 **Galois 上同调** (当 $G$ 有限时 Galois 上同调退化成之前讨论的群上同调). 显然 $H_c^i(G,\cdot)$ 也满足长正合列定理. 该上同调群也可以通过极限给出：若 $M_k$ 是一些离散 $G_k$-模形成的正向系统且 $G_k$ 形成反向系统，那么 $H_c^i(\varprojlim G_k,\varinjlim M_k)\cong\varinjlim H^i(G_k,M_k)$.

## 2、局部类域论

**如无特别声明，本节涉及的域均是局部域**. 设 $K$ 是 Nonarchimedean 局部域，若 $L/K$ 是 Galois 扩张，简记 $H^i(L/K):=H^i(\mathrm{Gal}(L/K),L^\times)$. 记 $K$ 的整数环、单值化子、剩余域分别为 $\mathcal{O}_K$、$\varpi_K$、$k$. 若对任意 $i>0$

记 $U_K^i := 1 + \langle \varpi_K \rangle^i$，则显然有 $\mathcal{O}_K^\times / U_K^1 \cong k^\times, U_K^i / U_K^{i+1} \cong k (i > 0)$. 我们最终的目的是给出所谓的**局部互反律**(定理 2.2)，首先需要一些引理，也就是计算一些必要的上同调并定义映射 Inv：

**定理 2.1** 设 $K$ 是局部域，则存在典范同构 $\mathrm{Inv}_K : H^2(K^{\mathrm{al}}/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，使得对任意有限 Galois 扩张 $L/K$ 有如下行正合的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(L/K) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d] & H^2(K^{\mathrm{al}}/K) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "\mathrm{Inv}_K"] & H^2(K^{\mathrm{al}}/L) \arrow[d, "\mathrm{Inv}_L"] \\
0 \arrow[r] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "{[L:K]}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

该图诱导同构 $\mathrm{Inv}_{L/K} : H^2(L/K) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

**证明** 首先考虑非分歧的情形：

**Step1**：设 $L/K$ 是有限非分歧 Galois 扩张，则 $H_T^i(\mathrm{Gal}(L/K), \mathcal{O}_L^\times) = 0, i \in \mathbb{Z}$. **证**：由于 $L/K$ 非分歧，故可设 $\varpi_L \in K$. 注意到 $L^\times \cong \mathcal{O}_L^\times \times \mathbb{Z}$ 且 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 在后一个分量上的作用平凡，故 $H^i(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times) \cong H^i(\mathrm{Gal}(L/K), \mathcal{O}_L^\times) \oplus H^i(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Z})$. 此时由例 1.7(2) 得 $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathcal{O}_L^\times) = 0$；又由满射 $\mathrm{Nm}_{L/K} : \mathcal{O}_L^\times \to \mathcal{O}_K^\times$(因为有限域之间的 $\mathrm{Nr} : (l^\times, \cdot) \to (k^\times, \cdot)$ 和 $\mathrm{Tr} : (l, +) \to (k, +)$ 都是满同态，故可在剩余域中逐阶地构造原像) 得 $H_T^0(\mathrm{Gal}(L/K), \mathcal{O}_L^\times) = 0$，再应用定理 1.14(5) 即可.

**Step2**：存在同构 $\mathrm{Inv}_K : H^2(K^{\mathrm{un}}/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 满足定理 2.1 的条件. **证**：设 $L/K$ 是有限非分歧 Galois 扩张. 由 Step1 知正合列 $0 \to \mathcal{O}_L^\times \to L^\times \to \mathbb{Z} \to 0$ 诱导同构 $H^2(L/K) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Z})$. 考虑 Abel 群的复合同态 $\mathrm{Inv}_{L/K} : H^2(L/K) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Z}) \xlongequal{\text{定理 } 1.14(4)} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{f \mapsto f(\sigma)} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，这里 $\sigma$ 是 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的 Frobenius 元. 分析挠元可知 $\mathrm{Im}(\mathrm{Inv}_{L/K}) = \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. 由命题 1.18 对 $L$ 取极限即可.

而对一般的分歧情形讨论如下：

**Step3**：设 $L/K$ 是有限 Galois 扩张，则 $\frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow H^2(L/K)$. **证**：考虑如下行正合的交换图即可：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "{[L:K]}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Step2}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal, "\mathrm{Step2}"] \\
0 \arrow[r] & \ker(\mathrm{Res}) \arrow[r] \arrow[d, hook, dashed] & H^2(K^{\mathrm{un}}/K) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, hook, "\mathrm{Inf}"] & H^2(L^{\mathrm{un}}/L) \arrow[d, hook, "\mathrm{Inf}"] \\
0 \arrow[r] & H^2(L/K) \arrow[r] & H^2(K^{\mathrm{al}}/K) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^2(K^{\mathrm{al}}/L)
\end{tikzcd}$$

**Step4**：设 $L/K$ 是有限 Galois 扩张，则 $H^2(L/K) \hookrightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. **证**：归纳法. 当 $[L:K] = p$ 为素数时，Galois 群是循环群. 由定理 1.14(4) 和 (5) 有 $|H^2(L/K)| = h(L^\times) = h(\mathcal{O}_L^\times)h(\mathbb{Z}) \xlongequal{h(\mathcal{O}_L^\times)=1} |H_T^0(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Z})| = |\mathrm{Gal}(L/K)| = p$. 而当 $[L:K] = n$ 时，由可解性知存在 Galois 扩张 $K \subsetneq M \subsetneq L$，根据例 1.9(6) 有正合序列 $0 \to H^2(M/K) \to H^2(L/K) \to H^2(L/M)$，因此 $|H^2(L/K)| \leq |H^2(M/K)| \cdot |H^2(L/M)|$. 对 $n$ 归纳即可.

**Step5**：定理 2.1 成立. **证**：设 $L/K$ 是有限 Galois 扩张，Step3 和 Step4 给出 $\frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong H^2(L/K)$. 观察 Step3 的交换图并且注意到 $H^2(K^{\mathrm{al}}/K) = \bigcup_L H^2(L/K)$，这可以给出同构 $\mathrm{Inf} : H^2(K^{\mathrm{un}}/K) \xrightarrow{\sim} H^2(K^{\mathrm{al}}/K)$. 由 Step2 知映射 $\mathrm{Inv}_K \circ \mathrm{Inf}^{-1} : H^2(K^{\mathrm{al}}/K) \to \mathbb{Q}$ 满足定理 2.1 的条件.■

**定理 2.2(Artin)** 设 $L/K$ 是有限 Galois 扩张，则存在同构 (称为**局部互反映射**)$\phi_{L/K} : K^\times/\mathrm{Nr}_{L/K}(L^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}}$. 事实上 $\phi_{L/K}^{-1}(\cdot) = (\cdot) \cup \mathrm{Inv}_{L/K}^{-1}\left(\frac{1}{[L:K]} \bmod \mathbb{Z}\right) : H_T^{-2}(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_T^0(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times)$.

**证明** 取定理 1.17 中 $G := \mathrm{Gal}(L/K), M := L^\times$，由例 1.7(2) 和定理 2.1 知其所有条件全部成立，因此 $\mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}} = H_1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Z}) \cong H_T^0(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times) = K^\times/\mathrm{Nr}(L^\times)$.■

**定义 2.3** 同态 $\phi_K : K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K), \phi_K(\varpi_K)|_{K^{\mathrm{un}}} := \mathrm{Frob}_K$ 称为**局部 Artin 映射**.

**注意 2.4** (1) 设 $L/K$ 是有限非分歧 Galois 扩张，不难验证有群同构 $\mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(l/k), [a\varpi \mapsto \sigma(a)\varpi] \mapsto [a + \langle\varpi\rangle \mapsto \sigma(a) + \langle\varpi\rangle]$. 注意到有限域上的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(l/k)$ 由满足 $\sigma a \equiv a^{|k|} \bmod \langle\varpi\rangle, a \in \mathcal{O}_L$ 的 Frobenius 元 $\sigma$ 生成，故记它在 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 中对应的生成元为 $\mathrm{Frob}_{L/K}$. 不难发现若 $L/K$ 是有限非分歧

Galois 扩张，则定义 2.3 中 $\phi_K(\varpi_K)|_L = \mathrm{Frob}_{L/K}$.

(2) 设 $K$ 是局部域，则 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{un}}/K) \cong \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{al}}/k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} = \langle \sigma : x \mapsto x^{|k|} \rangle$. 仍记该 Frobenius 元 $\sigma$ 在 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{un}}/K)$ 中对应的生成元为 $\mathrm{Frob}_K$. 定义 2.3 告诉我们 $\phi_K(\varpi_K)|_{K^{\mathrm{un}}} = \mathrm{Frob}_K$.

(3) 设 $L/K$ 是有限 Abel 扩张，可以验证下图中左图是交换图：

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, "\phi_K"] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \arrow[d, "\sigma \mapsto \sigma|_L"] \\ K^\times/\mathrm{Nr}_{L/K}(L^\times) \arrow[r, "\phi_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L/K) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, "\phi_{L/K}"] \arrow[dr, "\phi_{M/K}"'] & \mathrm{Gal}(L/K) \arrow[d] \\ & \mathrm{Gal}(M/K) \end{tikzcd}$$

(4) 若 $K \subseteq M \subseteq L$ 均是 Abel 扩张，则结合定理 2.2 与定理 1.10 不难验证上图中右图是交换图.

(5) 满足上述所有性质的 $\phi_K : K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ 是唯一的.

为了分类所有的 Abel 扩张，则需要确定所有所谓的“范子群”.

**定理 2.5(存在定理)**　设 $K$ 是局部域，称 $K^\times$ 的形如 $\mathrm{Nr}_{L/K}(L^\times)$ 的子群为**范子群** (Norm Groups)，其中 $L/K$ 是有限 Abel 扩张. 此时有一一对应 $\{K^\times\text{的范子群}\} \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} \{K^\times\text{的指数有限开子群}\}$.

**证明　Step1**：“$\subseteq$”． **证**：由定理 2.2 知范子群一定指数有限. 由 $\mathcal{O}_L^\times$ 紧知 $\mathrm{Nm}(\mathcal{O}_L^\times)$ 是 $K^\times$ 的闭子群，注意到 $\mathrm{Nr}(L^\times) \cap \mathcal{O}_K^\times = \mathrm{Nm}(\mathcal{O}_L^\times)$ 故 $\mathcal{O}_K^\times/\mathrm{Nm}(\mathcal{O}_L^\times) \hookrightarrow K^\times/\mathrm{Nr}(L^\times) = \mathrm{Gal}(L/k)$ 是个有限群，因此 $\mathrm{Nm}(\mathcal{O}_L^\times)$ 是 $\mathcal{O}_K^\times$ 的指数有限闭子群，从而在 $\mathcal{O}_K^\times$ 或 $K^\times$ 中开. 所以 $\mathrm{Nr}(L^\times)$ 包含了 $K^\times$ 的一个开子群，故它本身也是开的.

**Step2**：分如下几步证明“$\supseteq$”：

**Step2-1**：记 $D_K := \bigcap_{[L:K]<\infty} \mathrm{Nr}_{L/K}(L^\times)$，则 $D_K$ 可除. 证明略.

**Step2-2**：任意 $K^\times$ 的指数有限且包含 $\mathcal{O}_K^\times$ 的子群均是范子群. **证**：由正合列 $0 \to \mathcal{O}_K^\times \to K^\times \to \mathbb{Z} \to 0$ 知满足题设条件的子群均形如 $\mathrm{ord}_K^{-1}(n\mathbb{Z}), n \geq 1$. 现设 $K_n/K$ 是次数为 $n$ 的非分歧扩张，则 $K^\times$ 的子群 $\mathrm{Nr}_{K_n/K}(K_n^\times)$ 包含 $\mathcal{O}_K^\times$ 且 $\mathrm{ord}_K\big(\mathrm{Nr}_{K_n/K}(K_n^\times)\big) = n\mathbb{Z}$，证毕.

**Step2-3**：“$\supseteq$”． **证**：记 $\mathcal{N}$ 为所有 $K^\times$ 的范子群作成的集合，故 $D_K = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$. 设 $I$ 是 $K^\times$ 的指数有限开子群，由 $D_K$ 可除知存在某个 $N \in \mathcal{N}$ 使得 $I \supseteq N \cap (\mathcal{O}_K^\times \cdot (N \cap I))$. 此时由 $K^\times/(N \cap I) \hookrightarrow (K^\times/N) \times (K^\times/I)$ 得 $[K^\times : N \cap I] < \infty$，并且注意到 $\mathcal{O}_K^\times \cdot (N \cap I) \supseteq \mathcal{O}_K^\times$，故根据 Step2-2 知 $\mathcal{O}_K^\times \cdot (N \cap I)$ 是范子群，从而由定理 2.2 和注意 2.4(4) 可证 $I$ 也是范子群.■

综上我们有双射 $\{K\text{的有限 Abel 扩张}\} \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} \{K^\times\text{的范子群}\}, L \longmapsto \mathrm{Nr}(L^\times)$. 由于 $K^{\mathrm{ab}} = \varinjlim_{\text{有限 Abel 扩张} L/K} L$，因此 Profinite 完备化 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) = \varprojlim_L \mathrm{Gal}(L/K) = \varprojlim_L K^\times/\mathrm{Nr}(L^\times) = \varprojlim_{[K^\times:N]<\infty} K^\times/N = \widehat{K^\times}$. 注意到 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{un}}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}}, \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \oplus \mathcal{O}_K^\times$，从而局部 Artin 映射可以看成是一个 Profinite 完备化，换句话说有如下行正合的交换图 (第二行是第一行的 Profinite 完备化)：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_K^\times \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K^\times \arrow[r, "\mathrm{ord}_K"] \arrow[d, "\phi_K"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K^{\mathrm{un}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{un}}/K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

## 3、Brauer 群与障碍

**如无特别声明，本节涉及的代数均是有限维的，关于乘法不一定交换**. 此处旨在介绍 Brauer 群及其应用. 首先给出一些预备知识：

**定义 3.1**　设 $K$ 是域，$A$ 是 $K$-代数，$V$ 是 $A$-模. 称 $V$ **忠实**，如果 $aV = 0$ 蕴含 $a = 0$；称 $V$ **单**，如果 $V \neq 0$ 且除零模外 $V$ 不含其它真 $A$-子模；称 $V$ **半单**，如果它可写成有限多个单 $A$-模的直和；称 $V$ **不可分解**，如果它不可写成两个非零 $A$- 模的直和 (因此不可分解模是半单的当且仅当它是单模). 称 $A$ **半单**，如果所

有 $A$-模都是半单模 (由于任何 $A$-模都是 $A \in \mathsf{Mod}(A)$ 的若干拷贝的商，故只需要验证 $A$-模 $A$ 是半单的)；称 $A$ **单**，如果除平凡理想外 $A$ 不含其它真双边理想 (由定理 3.2.2 知单代数都是半单的)；称 $A$ 是**中心代数**，如果其中心为 $K$.

为了给出 Brauer 群的定义，我们还需要表示论中的一些结论：

**命题 3.2** 设 $B$ 是 $K$-代数 $A$ 的子代数，记 $C_A(B) := \{a \in A : \forall b \in B, ba = ab\}$. 易见 $C_A(B)$ 仍然是 $A$ 的子代数.

(1)**双重中心定理**：设 $K$ 是域，$A$ 是 $K$-代数，则 $C_{C_A(A)}(C_A(A)) = A$. 一般的，若 $A$ 是中心单 $K$-代数，$B$ 是 $A$ 的单子代数，则 $C_A(B)$ 单且 $C_{C_A(B)}(C_A(B)) = B$，此外还有 $[B : K][C_A(B) : K] = [A : K]$.

(2)**Artin-Wedderburn 定理**：设 $K$ 是域，$A$ 是单 $K$-代数，则存在 (唯一的)$n$ 以及 (在同构意义下唯一的) 可除 $K$-代数 $D$ 使得 $A \cong \mathrm{Mat}(n, D)$.

(3)**Noether-Skolem 定理**：设 $K$ 是域，$A$ 是中心单 $K$-代数，$B_1, B_2$ 是 $A$ 的单子代数. 若同态 $f : B_1 \to B_2$ 是同构，则存在可逆元 $a \in A$ 使得 $f(b) = aba^{-1}, b \in B_1$.

(4) 设 $K$ 是域，$A, A'$ 是 $K$-代数，$B, B'$ 分别是 $A, A'$ 的子代数. 则 $C_{A\otimes_K A'}(B\otimes_K B') = C_A(B)\otimes_K C_{A'}(B')$. 因此两个中心 $K$-代数的张量积仍然是中心 $K$-代数.

(5) 两个中心单 $K$-代数的张量积仍然是单 $K$-代数.

(6) 设 $K$ 是域，$A$ 是中心单 $K$-代数，则有同构 $A \otimes_K A^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(A) \cong \mathrm{Mat}([A : K], K), (a \otimes a') \longmapsto [v \mapsto ava']$.

(7) 设 $K$ 是域，$A$ 是中心单 $K$-代数，$L/K$ 是域扩张，则 $A \otimes_K L$ 是中心单 $L$-代数. 因此若 $A$ 是中心单 $K$-代数，则 $[A : K] = [A \otimes_K K^{\mathrm{al}} : K^{\mathrm{al}}] = [\mathrm{Mat}(n, K^{\mathrm{al}}) : K^{\mathrm{al}}]$ 是平方数.

有了命题 3.2 的保证，我们便可定义所谓的 Brauer 群：

**定义 3.3(Brauer 群)** 设 $K$ 是域，$A$、$B$ 为中心单 $K$-代数. 规定 $A \sim B$ 当且仅当存在正整数 $m, n$ 使 $A \otimes_K \mathrm{Mat}(n, K) \cong B \otimes_K \mathrm{Mat}(m, K)$. 不难验证这是一个等价关系，商集 $\mathrm{Br}(K) := \{\text{中心单}K\text{-代数}\}/\sim$ 配备运算 $[A]\cdot[B] := [A \otimes_K B]$ 之后作成一个 Abel 群 (请读者自行验证)，称为 **Brauer 群**. 易证 $\mathrm{Br}(K)$ 中的单位元为 $[\mathrm{Mat}(n, K)]$，取逆运算为 $[A]^{-1} = [A^{\mathrm{opp}}]$.

由于域扩张 $K \hookrightarrow L$ 诱导同态 $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L), [A] \mapsto [A \otimes_K L], [\mathrm{Mat}(n, K)] \mapsto [\mathrm{Mat}(n, L)]$，故也可将 $\mathrm{Br}(\cdot) : \mathsf{Field} \to \mathsf{Ab}$ 视作共变函子 (或者 $\mathrm{Br}(\cdot) : \mathsf{Sch}(K) \to \mathsf{Ab}$ 是反变函子). 记 $\mathrm{Br}(L/K) := \ker(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L))$.

上述函子性也可以从 Brauer 群的上同调定义中看出：

**定理 3.4** 设 $L/K$ 是有限 Galois 扩张 (记它的 Galois 群为 $G$)，则有 Abel 群的同构 $H^2(L/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(L/K)$. 此外还有同构 $\mathrm{Br}(K) \cong H^2(K^{\mathrm{al}}/K) = \bigcup_{[L:K]<\infty} H^2(L/K) = \bigcup_{[L:K]<\infty} \mathrm{Br}(L/K)$.

**证明** 定义 $\Gamma(L/K) := \big\{[A] \in \mathrm{Br}(K) : L \subseteq A, [A : K] = [L : K]^2\big\}$. 现取定 $[A] \in \Gamma(L/K)$. 对任意 $\sigma \in G$，由命题 3.2(3) 知存在 $e_\sigma \in A$ 使得 $\sigma(a) = e_\sigma a e_\sigma^{-1}, a \in L$. 由 $C_A(L) = L$ 知上述 $e_\sigma$ 在相差 $L^\times$ 中某个元素相乘的意义下唯一. 不难验证对于 $\sigma, \tau \in G$ 也有 $\sigma\tau(a) = e_\sigma e_\tau a e_\tau^{-1} e_\sigma^{-1}, a \in L$，因此存在 $\varphi_A(\sigma, \tau) \in L^\times$ 使得 $e_\sigma e_\tau = \varphi_A(\sigma, \tau) e_{\sigma\tau}$.

**Step1**：$\varphi_A \in H^2(L/K)$. **证**：容易验证 $\varphi_A$ 满足等式 $e_\rho(e_\sigma e_\tau) = e_\rho(\varphi_A(\sigma, \tau)e_{\sigma\tau}) = \rho\varphi_A(\sigma, \tau)\cdot\varphi_A(\rho, \sigma\tau)\cdot e_{\rho\sigma\tau}$ 和 $(e_\rho e_\sigma)e_\tau = \varphi_A(\rho, \sigma)e_{\rho\sigma}e_\tau = \varphi_A(\rho, \sigma)\varphi_A(\rho\sigma, \tau)\cdot e_{\rho\sigma\tau}$，因此结合律 $e_\rho(e_\sigma e_\tau) = (e_\rho e_\sigma)e_\tau$ 给出上链条件.

上述操作给出映射 $\Theta : \Gamma(L/K) \to H^2(L/K), [A] \mapsto \varphi_A$(请读者自行验证它良好定义).

**Step2**：$\Theta$ 是满射，并且对任意 $\varphi \in H^2(L/K)$，$\Theta^{-1}(\varphi)$ 是同构类. **证**：对任意上链 $\varphi : G \times G \to L^\times \in H^2(L/K)$，定义 $L$-线性空间 $S_\varphi := \big\langle e_\sigma : \sigma \in G, \sigma = e_\sigma(\cdot)e_\sigma^{-1}, e_\sigma e_\tau = \varphi(\sigma, \tau)e_{\sigma\tau}\big\rangle$. 此时 $S_\varphi$ 是一个 $K$-代数：乘法结合律由上链条件给出，单位元为 $e_1$. 设 $I$ 为 $S_\varphi$ 的双边理想，则 $I$ 是 $S_\varphi$ 的 $L$-线性子空间. 如果存在 $e_\sigma \in I$，则由 $e_\sigma e_\tau = \varphi(\sigma, \tau)e_{\sigma\tau}$ 知 $I$ 包含所有基，即 $I = S_\varphi$. 一般地，可以证明若 $I \neq 0$ 则它必包含某个 $e_\sigma$，因此 $S_\varphi$ 是单代数. 不难证明 $C_{S_\varphi}(Le_1) = L$ 从而 $C_{S_\varphi}(S_\varphi) = K$，因此 $S_\varphi$ 还是中心代数.

**Step3**：$(\Gamma(L/K)/\cong) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(L/K), [A] \mapsto [A]$ 是双射. **证**：若 $A \sim A'$，则存在中心可除代数 $D$ 使得 $A \sim D \sim A'$，由命题 3.2(2) 得 $A \cong \mathrm{Mat}(n, D), A' \cong \mathrm{Mat}(m, D)$. 注意到 $[A : K] = [A' : K] = [L : K]^2$ 蕴含 $n = m$，所以 $A \cong A'$，这就证明了单射. 满射读者自行验证.■

**注意 3.5** (1) 定理 2.1 中的交换图变为：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(L/K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}(L) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

(2) 可以证明存在正合序列 $0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_v \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum_v \mathrm{Inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$.

(3) 与代数几何中上同调群反映局部与整体之间联系的障碍类似，Brauer 群也反映了数论中局部整体原则的障碍. 考虑反变函子 $\mathrm{Br}(\cdot) := H^2_{\mathrm{et}}(\cdot, \mathbb{G}_m)$，易见 $\mathrm{Br}(K) = H^2_{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(K), \mathbb{G}_m)$. 现任取定 $A \in \mathrm{Br}(X)$，可以证明有如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
& X(K) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & X(\mathbb{A}_K) \arrow[d, "\gamma_A"'] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(K) \arrow[r, "j"] & \bigoplus_v \mathrm{Br}(K_v) \arrow[r, "\sum_v \mathrm{Inv}_v"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $i : [\mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{x} X] \mapsto \big(x \circ (\mathrm{Spec}(K_v) \to \mathrm{Spec}(K))\big), \gamma_A : \big(\mathrm{Spec}(K_v) \xrightarrow{x_v} X\big) \mapsto \big(\mathrm{Br}(x_v)(A)\big), \varphi_A : x \mapsto \mathrm{Br}(x)(A), j : A \mapsto \big(\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(K_v) \to \mathrm{Spec}(K))(A)\big)$. 现定义 **Brauer-Manin 障碍**为集合 $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} := \bigcap_{A \in \mathrm{Br}(X)} \big\{y \in X(\mathbb{A}_K) : \big((\sum_v \mathrm{Inv}_v) \circ \gamma_A\big)(y) = 0\big\}$，则 $X(K) \subseteq X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_K)$，它说明局部整体原则可以放到 $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ 上来判断. 有例子表明 $X(K) = \varnothing$ 且 $X(\mathbb{A}_K) \neq \varnothing$ 但 $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$，这说明该障碍不是最精细的，因此代数数论的一大主题便是寻找更精细的障碍.

**例 3.6** 一些特殊的域的 Brauer 群总结如下：$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；$\mathrm{Br}(\text{代数闭域}) = 0$；由定理 3.4 和定理 2.1 的证明知 $\mathrm{Br}(\text{有限域}) = 0$；则由定理 2.1 知 $\mathrm{Br}(\text{Nonarchimedean 局部域}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

## 4、整体类域论

**如无特别声明，本节涉及的域均是整体域**. 现在便可以介绍整体类域论. 在数论中将局部与整体联系到一起的工具即所谓的 Adele 与 Idele. 受之前的启发，我们需要先给出 Galois 群在 Idele 上的作用，从而可以使用同调代数的标准操作.

与局部类域论类似，我们先阐述最终的结论. 设 $L/K$ 是有限 Abel 扩张，$v$ 是 $K$ 的一个素点. 令 $w|v$ 是 $L$ 的素点，考虑其**分解群**$D(w) := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \sigma w = w\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$. 第 2 节的局部类域论给出了同态 $\phi_{K_v} : K_v^\times \to D(w) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$，并且注意到 $D(w)$ 与 $w|v$ 的选取无关 (只相差一个共轭)，因此映射 $\phi_{K_v}$ 仅与素点 $v$ 有关.

**命题 4.1** 设 $K$ 是整体域，则存在唯一连续同态 $\phi_K : \mathbb{I}_K \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ 使得对任意有限 Abel 扩张 $L/K$ 以及任意素点 $w|v$，有如下两个交换图：

$$\begin{tikzcd}
K_v^\times \arrow[r, "\phi_{K_v}"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \arrow[d, hook] \\
\mathbb{I}_K \arrow[r, "\phi_{L/K}", "\boldsymbol{x} \mapsto \phi_K(\boldsymbol{x})|_L"'] & \mathrm{Gal}(L/K)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_v^\times \arrow[r, "\phi_{K_v}"] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{ab}}/K_v) \arrow[d] \\
\mathbb{I}_K/K^\times \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)
\end{tikzcd}$$

**证明** 对任意 $\boldsymbol{x} = (x_v) \in \mathbb{I}_K$，若 $x_v \in \mathcal{O}_v^\times$ 且 $L_w/K_v$ 非分歧，则由注意 2.4(1) 知 $\phi_{K_v}(x_v) = 1$，故仅有有限多个 $\phi_{K_v}(x_v) \neq 1$，所以 $\phi_{L/K}(\boldsymbol{x}) := \prod_v \phi_{K_v}(x_v)$ 良好定义. 由局部类域论可以给出 $\phi_K$.■

**定理 4.2** 设 $K$ 是整体域，称命题 4.1 中的同态 $\phi_K : \mathbb{I}_K \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ 或 $\phi_K : \mathbb{I}_K/K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ 为**整体 Artin 映射**，它满足 $\phi_K(K^\times) = 1$ 且对任意有限 Abel 扩张 $L/K$，$\phi_K$ 诱导同构 (称为**整体互反映射**)$\phi_{L/K} : \mathbb{I}_K/\big(K^\times \cdot \mathrm{Nm}_{L/K}(\mathbb{I}_L)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L/K)$，其中 $\mathrm{Nm}_{L/K}(\boldsymbol{x})_v = \prod_{w|v} \mathrm{Nm}_{L_w/K_v}(x_w)$.

**证明** 整体类域论的证明需要用到大量解析技术和 Brauer 群的性质，基本的想法还是通过控制素点联系

局部与整体，具体细节此处不再赘述，详见 [1].■

类似于定理 2.5，我们有：

**定理 4.3(存在定理)** 设 $K$ 是整体域，有一一对应 $\{K$的有限 Abel 扩张$\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{I}_K/K^\times$的指数有限开子群$\}$，$L \longmapsto \mathrm{Nm}_{L/K}(\mathbb{I}_L/L^\times)$.

限于篇幅此处存在定理的证明略去，详见 [1] 的相应章节.

**例 4.4** 注意到有拓扑群的同构 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}\times\prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{R}_{>0}\times\widehat{\mathbb{Z}}^\times$，因此若记 $\mathbb{Q}^{\mathrm{cy}} := \bigcup_n \mathbb{Q}[\zeta_n]$，这里 $\zeta_n$ 是 $n$ 次单位根，则整体互反映射给出 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}/\big(\mathbb{Q}^\times\cdot\mathrm{Nm}(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}[\zeta_n]}/\mathbb{Q}[\zeta_n]^\times)\big) \leftarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cy}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_n \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$. 由此可以推出 $\mathbb{Q}$ 的 Kronecker-Weber 定理：

**定理 4.5(Kronecker-Weber)** $\mathbb{Q}$ 是任何有限 Abel 扩张都被某个 $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ 包含.

**证明** 由整体类域论知 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \cong \prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p^\times = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.■