有限群的复表示论概览——表示论专题 I

August 25, 2020

本讲义所涉及的群均是有限群，表示均是复表示，即涉及的域都是 $\mathbb{C}$. 选择 $\mathbb{C}$ 作为主要研究对象的理由是：(1) 特征零；(2) 代数闭；(3) 大家熟悉.

0、前言

本文旨在以复表示为例，介绍简单的有限群表示论，具体包括酉表示、特征标理论、Fourier 变换、Burnside 定理、诱导表示等，讲究快速上手速战速决，有线性代数和抽象代数的基础即可阅读. 虽然读起来可能会有点无聊，但是一想到在这么短的篇幅内就能一瞥有限群表示论的大概，相比之下忍受这些无聊都是小问题了 (读者不妨换位思考，揣摩一下笔者写这份讲义时的心情).

有限群表示论作为一个工具，其实用性自不必说，故前言就此打住，爱看不看!

参考文献

[1] B. Steinberg. Representation Theory of Finite Groups. Springer.

[2] 丘维声. 有限群和紧群的表示论. 北京大学出版社.

[3] 孟道骥，朱萍. 有限群表示论. 科学出版社.

[4] P. Diaconis. Group representations in probability and statistics. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes-Monograph Series, 11. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.

[5] 朱子阳. Galois 理论——代数数论初探. http://www.cnblogs.com/zhuziyangcnu/.

[6] 维基百科：Feit–Thompson theorem.

[7] W. Feit, J.G. Thompson. Solvability of groups of odd order. Pacific Journal of Mathematics, 13:775–1029.

[8] R. Solomon. A brief history of the classification of the finite simple groups. Bull. AMS, 38(3):315–352, DOI:10.1090/S0273-0979-01-00909-0.

[9] D.Gorenstein. Classifying the finite simple groups. Bull. AMS, 14(1986):1-98.

[10] T. Dokchitser. https://people.maths.bris.ac.uk/~matyd/GroupNames/index.html.

[11] E. Kowalski. An Introduction to the Representation Theory of Groups(GSM155). AMS.

[12] S. Lang. Algebra(GTM211). Springer.

朱子阳[1]，2020 年 7 月于首都师范大学

[1]邮箱 zhuziyang98@163.com

1、基本定义与基本结论

定义 1(表示) 群 G 的一个 **(复) 表示**是指群同态 $\varphi: G \to GL(V)$，其中 V 是一个非零有限维 $\mathbb{C}$-线性空间 (当然 $\mathbb{C}$ 可以换成一般的域，但本文暂不讨论这类情况)，V 的维数称为该表示的**维数**，记作 $\deg(\varphi)$. 对任意 $g \in G$，$\varphi(g): V \to V, v \mapsto \varphi(g)(v)$ 是 V 的一个可逆线性变换，为避免符号混乱将 $\varphi(g)$ 记为 φ_g.

例 (1)G 的平凡表示是指 $\varphi: G \to \mathbb{C}^*, \varphi_g = 1$；(2) 一个非平凡的表示 $\varphi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, \varphi_{[m]} = e^{2\pi\, \mathrm{i} m/n}$.

定义 2(等价关系) 有时两个看似不同的表示其实蕴含了同样的信息，为此我们给出两个表示等价的概念. 群 G 的两个复表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 与 $\psi: G \to GL(W)$ 称为是**等价**的 (记作 $\varphi \sim \psi$)，如果存在 $\mathbb{C}$-线性空间的同构 $T: V \to W$，使得对任意 $g \in G$，$\psi_g = T\varphi_g T^{-1}$(即 $\psi_g T = T\varphi_g$). 也就是说，两个复表示 φ 与 ψ 等价当且仅当有共轭关系的交换图：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"] & W. \end{tikzcd}$$

定义 3(不变子空间) 与线性代数类似，给定表示 $\varphi: G \to GL(V)$，子空间 $W \subseteq V$ 称为是**G- 不变子空间**，如果对任意 $g \in G$ 以及任意 $w \in W$，$\varphi_g(w) \in W$.

定义 4(直和) 设 $\varphi: G \to GL(V_1)$ 与 $\psi: G \to GL(V_2)$ 是两个复表示，它们的**直和**定义为 $\varphi \oplus \psi: G \to GL(V_1 \oplus V_2), (\varphi \oplus \psi)_g(v_1, v_2) = \big(\varphi_g(v_1), \psi_g(v_2)\big)$. 特别地，如果将 V_1, V_2 等同于 $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$，那么 $(\varphi \oplus \psi)_g = \begin{pmatrix} \varphi_g & 0 \\ 0 & \psi_g \end{pmatrix}$.

定义 5(子表示) 设 $\varphi: G \to GL(V)$ 是一个表示. 如果 $W \subseteq V$ 是 G- 不变子空间，则可将 φ 限制到 W 上得到表示 $\varphi|_W: G \to GL(W), (\varphi|_W)_g(w) = \varphi_g(w)$，称为 φ 的一个**子表示**. 如果 $V_1, V_2 \subseteq V$ 是 G- 不变子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$，则利用线性代数的工具易证 φ 等价于直和 $\varphi|_{V_1} \oplus \varphi|_{V_2}$.

定义 6(不可约表示) 一个非零表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 称为是**不可约**的，如果 V 只有平凡的 G-不变子空间 $\{0\}, V$. 表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 称为是**完全可约**的，如果 $V = \bigoplus_i V_i$，其中 V_i 是 G-不变子空间且 $\varphi|_{V_i}$ 是不可约表示 (即 φ 等价于一些不可约表示的直和). 群 G 的一个非零表示 φ 称为是**可分解**的，如果 $V = V_1 \oplus V_2$，其中 V_1, V_2 均是非零 G-不变子空间 (即 φ 是其子表示的直和)；否则称为不可分解的. 显然等价于一个可分解 (不可约、完全可约) 表示的表示也是可分解 (不可约、完全可约) 的. 对复表示而言，可分解 $\xLeftrightarrow{\text{定理10}}$ 可约 (但对其它域上的表示则不然，表示论中经常要求域的特征不整除群 G 的阶，否则需要一种叫模表示的理论).

对于 2 维复表示，线性代数的方法给了我们如下断言：

命题 7 设 $\varphi: G \to GL(V)$ 是 2 维复表示，则 φ 不可约当且仅当所有 φ_g 之间没有共同的特征向量.

证明思路 φ 可约等价于 V 有 1 维 G-不变子空间，即存在非平凡 $\mathbb{C}v$. 此时 v 就是所有 φ_g 的特征向量.■

定义 8(酉表示) $\mathbb{C}$-线性空间 V 上的 **(复) 内积**是指映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{C}$，满足 $\langle c_1 v_1 + c_2 v_2, w \rangle = c_1 \langle v_1, w \rangle + c_2 \langle v_2, w \rangle$、$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ 和 $\langle v, v \rangle \geq 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ 这三个条件. 设 V 是配备了复内积的 $\mathbb{C}$-线性空间，复表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 称为是**酉表示**，如果对任意 $g \in G, v, w \in V$，$\langle \varphi_g(v), \varphi_g(w) \rangle = \langle v, w \rangle$. 若记 $GL(V)$ 的酉变换子群为 $U(V)$，则上述表示 φ 可以视作 $\varphi: G \to U(V) \subseteq GL(V)$.

例 (1) 易证 $U(\mathbb{C}^1) \cong SO(2) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 因此 1 维酉表示即同态 $\varphi: G \to SO(2)$. 例如 $\varphi: \mathbb{R} \to SO(2), t \mapsto e^{2\pi\, \mathrm{i} t}$ 就是一个 1 维酉表示.

命题 9 设 $\varphi: G \to GL(V)$ 是一个酉表示，那么 φ 无非两种情况：不可约或可分解.

证明思路 若 φ 可约，则有非平凡 G-不变子空间 W. 验证 $W^\perp$ 也是 G- 不变子空间且 $V = W \oplus W^\perp$.■

定理 10 有限群的复表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 总与某个酉表示等价. 因此每个不可分解复表示不可约.

证明思路 由于等价性 (定义 2)，故考虑 $V = \mathbb{C}^n$ 的情况，证 φ 是酉表示即可. 设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的标准内积，在 $V = \mathbb{C}^n$ 上定义 $[v, w] := \sum_{g \in G} \langle \varphi_g(v), \varphi_g(w) \rangle$，验证 $[\cdot, \cdot]$ 是内积，则 φ 在该内积下是酉表示.■

定理 11(Maschke) 有限群 G 的复表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 一定是完全可约的$\big($对一般域 K 上的表示而言需要增加条件 $\mathrm{Char}(K) \nmid |G|\big)$.

证明思路 对 $\dim(V)$ 作第二类数学归纳法. 可递推是因为若 φ 可约 (不可约即证毕)，则可分解.■

综上所述，任何有限群的复表示 $\varphi: G \to GL(\mathbb{C}^n)$ 均等价于 $\mathrm{diag}(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$，其中 φ_i 不可约.

定义 12(表示间的态射) 设有复表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 及 $\psi: G \to GL(W)$. 一个从 φ 到 ψ 的**态射**是指一个 $\mathbb{C}$- 线性映射 $T: V \to W$(不一定可逆!)，使得对任意 $g \in G$，$T\varphi_g = \psi_g T$. 也就是说有交换图：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_g} & V \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ W & \xrightarrow{\psi_g} & W. \end{array}$$

所有从 φ 到 ψ 的态射作成的集合记为 $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$，它是线性空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ 的子集. 特别地，如果可逆线性映射 $T \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$，由定义 2 知 $\varphi \sim \psi$.

命题 13 实际上，验证定义可知 $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$ 是线性空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ 的线性子空间.

命题 14(核与像) 设 $V \xrightarrow{T} W \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$，则 $\ker(T)$ 是 V 的 G- 不变子空间；$\mathrm{Im}(T)$ 是 W 的 G- 不变子空间.

证明思路 以核为例，任意 $v \in \ker(T)$ 及 $g \in G$，$T\varphi_g(v) = \psi_g T v = 0$.■

下面的引理告诉我们，不可约表示之间的态射是非常有限的.

引理 15(Schur) 设 φ, ψ 是群 G 的不可约复表示，$T \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$. 则无非只有两种情况：$T$ 可逆或 $T = 0$. 此外，如果 $\varphi \nsim \psi$，则 $\mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi) = \{0\}$；如果 $\varphi = \psi$，则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $T = \lambda E$(单位阵). 因此，如果 $\varphi \sim \psi$ 均是不可约复表示，那么 $\dim\big(\mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)\big) = 1$.

证明思路 如果 $T \neq 0$，由于不可约表示没有非平凡的 G-不变子空间，根据命题 14 知 T 既单又满. 注意到当 λ 是 T 的特征值时 $\lambda E - T$ 不可逆，故 $\lambda E - T = 0$，证得后半部分.■

推论 16 任何 Abel 群 G 的不可约复表示 $\varphi: G \to GL(V)$ 是都是 1 维的. 因此对任何 Abel 群 G 的任何复表示 $\varphi: G \to GL(\mathbb{C}^n)$ 而言，线性变换 φ_g 均可对角化.

证明思路 任取 $h \in G$，则有 $\varphi_h \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \varphi)$，由引理 15 知存在 λ_h 使 $\varphi_h = \lambda_h E$. 此时 V 有 G- 不变子空间 $\mathbb{C}v$(v 是 V 中随便取定的一个向量)，由表示不可约得 $V = \mathbb{C}v$.■

推论 17 设 $A \in GL(\mathbb{C}^n)$ 满足 $A^k = E$，那么 A 的特征值在 k 次单位根中取.

证明思路 用线性代数的手段很容易证明该命题，但我们给出表示论的方法. 考虑复表示 $\varphi: \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to GL(\mathbb{C}^n), [t] \mapsto A^t$，由推论 16 知存在 $T \in GL(\mathbb{C}^k)$ 使得 $T^{-1}AT$ 是对角阵，记为 D. 显然 $D^k = T^{-1}A^kT = E$.■

下面介绍一个重要的概念：正交性.

定义 18(群代数) 设 G 是群，G 的**群代数**$L(G)$ 是指配备了内积 $\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$ 的 $\mathbb{C}$-线性空间 $\{f: G\text{上的复值函数}G \xrightarrow{f} \mathbb{C}\}$，其上的运算皆是逐点定义.

定理 19(Schur 正交关系) 设 $\varphi: G \to U(\mathbb{C}^n)$ 与 $\psi: G \to U(\mathbb{C}^m)$ 是**不等价**的不可约酉表示. 考虑 $L(G)$ 中的复值函数 $\varphi_{ij}: G \to \mathbb{C}$，$\varphi_{ij}(g)$ 规定为矩阵 φ_g 的 i 行 j 列的元素，那么对按定义 18 赋予的内积而言有：

(1)$\langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle = 0$；

(2)$\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n} & i = k\text{且}j = l, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

证明思路 逐一证明如下断言：**(断言 i)**设 $\varphi: G \to GL(V)$ 和 $\psi: G \to GL(W)$ 是两个复表示，$T: V \to W$ 是线性映射，那么 $P: \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi), T \mapsto P(T) := \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\psi_{g^{-1}}T\varphi_g$ 是线性满射.　这需要验证 $P(T) \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$ 且 P 确实是线性映射. 由 $P(T) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\psi_{g^{-1}}\psi_g T = T$ 知，如果 $T \in \mathrm{Hom}_G(\varphi, \psi)$，那么 $P(T) = T$，因此 P 满.

(断言 ii)设 $\varphi: G \to GL(V)$，$\psi: G \to GL(W)$ 是 G 的不可约复表示，$T: V \to W$ 是线性映射，那么 $\varphi \nsim \psi$ 蕴含 $P(T) = 0$；$\varphi = \psi$ 蕴含 $P(T) = \frac{\mathrm{tr}(T)}{\dim(V)}E$.　前者由引理 15 给出，后者也是根据引理 15：在这个情况下存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使 $P(T) = \lambda E$. 此时目标变成确定 λ. 注意到 $\mathrm{tr}(\lambda E) = \lambda\dim(V)$，因此 $P(T) = \frac{\mathrm{tr}(P(T))}{\dim(V)}E$. 而 $\mathrm{tr}(P(T)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\mathrm{tr}(\varphi_{g^{-1}}T\varphi_g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T)$，故结论成立.

(断言 iii)设 $\varphi: G \to U(\mathbb{C}^n)$，$\psi: G \to U(\mathbb{C}^m)$ 是酉表示，记 $A = E_{ki} \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{C})$(即 k 行 i 列为 1，其余为 0 的 $m \times n$ 阶矩阵)，则 $P(A)_{lj} = \langle \varphi_{ij}, \psi_{kl} \rangle$.　注意到 ψ_g 是酉矩阵，因此 $\psi_{g^{-1}} = \psi_g^{-1} = \psi_g^*$(共轭转置)，

即 $\psi_{lk}(g^{-1})=\overline{\psi_{kl}(g)}$. 据此计算 $P(A)_{lj}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\psi_{g^{-1}}E_{ki}\varphi_g)_{lj}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{lk}(g^{-1})\varphi_{ij}(g)=\langle\varphi_{ij},\psi_{kl}\rangle$. 第二个等号是根据线性代数的结论 $\big((a_{ij})E_{ki}(b_{ij})\big)_{lj}=\sum_{x,y}a_{lx}(E_{ki})_{xy}b_{yj}=a_{lk}b_{ij}$ 得到.

(断言 iv)定理 19 成立. 取 $A=E_{ki}$.(1)：由断言 ii 有 $P(A)=0$. 而断言 iii 揭示 $P(A)_{lj}=\langle\varphi_{ij},\psi_{kl}\rangle=0$; (2)：由断言 ii 知 $P(A)=\frac{\mathrm{tr}(E_{ki})}{\dim(V)}E=\frac{\delta_{ik}}{n}E$，再利用断言 iii 得 $\frac{\delta_{ik}}{n}E_{lj}=\frac{\delta_{ik}\delta_{lj}}{n}=\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle$.■

推论 20 群 G 的不可约复表示在等价的意义下只有有限多个 (更精确地，见定理 25). 特别，由定理 19(2) 知不可约酉表示 φ 对应了 $L(G)$ 的一个势为 $\deg(\varphi)^2$ 的正交集 $\{\varphi_{ij}:i,j=1,\cdots,\deg(\varphi)\}$.

证明思路 由定理 10，只需证明 G 的酉表示有有限个即可. 注意到 $\dim(L(G))=|G|$，由定理 19(1) 知每一个非零不可约酉表示均要对抬高群代数的维数作出贡献，因此它们至多为 $|G|$ 个.■

定义 + 命题 21(特征标) 设 $\varphi:G\to GL(V)$ 是一个复表示，复值函数 $\chi_\varphi:G\to\mathbb{C},g\mapsto\mathrm{tr}(\varphi_g)$ 称为 φ 的**特征标** (由于迹是相似不变量，故良好定义)，显然 $\chi_\varphi(1)=\dim(V)=\deg(\varphi)$. 易见对 1 维复表示 φ 而言有 $\chi_\varphi=\varphi$，此时可以混淆 χ_φ 与 φ. 特别当 φ 不可约时特征标亦称为**不可约特征标**. 若取 $V=\mathbb{C}^n$，$\varphi_g=\big(\varphi_{ij}(g)\big)$，那么有公式 $\chi_\varphi(g)=\sum_{i=1}^n\varphi_{ii}(g)$. 当然与之前类似，由于迹是相似不变量$\big(\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)\big)$，因此等价的表示有相同的特征标. 同样由 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ 可以得到等式 $\chi_\varphi(g)=\chi_\varphi(hgh^{-1})$，其中 $g,h\in G$.

定义 22(类函数) 函数 $f\in L(G)$ 称为是**类函数**，如果对任意 $g,h\in G$，成立等式 $f(g)=f(hgh^{-1})$. 等价地，这相当于是说对任意 $g\in G$，f 是定义在 $\{g$ 的共轭元$\}$ 这个集合上的常值函数(或者说，若记 C_g 为 G 中元素 g 所在的共轭类，那么 $f(C_g)$ 是良好定义的并且其值就是 $f(g)$，这样就可以确定一个从共轭类映到 $\mathbb{C}$ 的函数). 通常将 $L(G)$ 中所有类函数作成的集合记为 $Z(L(G))$(见命题 43). 命题 21 已经告诉我们，$\chi_\varphi\in Z(L(G))$.

命题 23 事实上，$Z(L(G))$ 是线性空间 $L(G)$ 的 $|C(G)|$ 维线性子空间，这里 $C(G)$ 指 G 的所有共轭类作成的集合.

证明思路 子空间的验证直接依照定义. 关于维数，定义类函数 $\delta_C:G\to\mathbb{C},\delta_C(g)=\begin{cases}1 & g\in C\\ 0 & g\notin\mathbb{C}\end{cases}$，下证 $\{\delta_C:C\in C(G)\}$ 构成 $Z(L(G))$ 的基即可. 显然任意 $f\in Z(L(G))$ 均可写成线性组合 $f=\sum_{C\in C(G)}f(C)\delta_C$，并且根据 $\langle\delta_C,\delta_{C'}\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\delta_C(g)\overline{\delta_{C'}(g)}=\begin{cases}\frac{|C|}{|G|} & C=C'\\ 0 & C\neq C'\end{cases}$ 知 $\{\delta_C:C\in C(G)\}$ 实际上是正交集，因此其元素必定线性无关.■

下面两个定理揭示了不可约特征标在 $L(G)$ 上的正交关系.

定理 24(正交关系 I) 设 φ,ρ 为群 G 的不可约复表示，那么 $\langle\chi_\varphi,\chi_\rho\rangle=\begin{cases}1 & \varphi\sim\rho\\ 0 & \varphi\nsim\rho\end{cases}$. 因此 G 的所有不可约特征标构成了 $Z(L(G))$ 中的一个正交集 (实际上还是基，证明见定理 25).

证明思路 根据定理 10，不失一般性考虑 $\varphi:G\to U(\mathbb{C}^n),\rho:G\to U(\mathbb{C}^m)$ 为酉表示. 由定义 18，$\langle\chi_\varphi,\chi_\rho\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\rho(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^n\varphi_{ii}(g)\sum_{j=1}^m\overline{\rho_{jj}(g)}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\langle\varphi_{ii}(g),\rho_{jj}(g)\rangle$，再利用定理 19 计算 $\langle\varphi_{ii},\rho_{jj}\rangle$ 即可.■

定理 25 在等价的意义下，设群 G 的所有不可约复表示为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$，那么由所有不可约特征标 $\chi_{\varphi_1},\cdots,\chi_{\varphi_s}$ 构成的正交集 (定理 24 已断言其正交性) 实际上就是 $Z(L(G))$ 的一组基. 因此 $s=\dim(Z(L(G)))=|C(G)|$. 我们还有推论：有限群 G 是 Abel 群当且仅当 $|G|=|C(G)|=s$，当且仅当其恰好有 $|G|$ 个不可约复表示的等价类.

证明思路 对任意类函数 f 而言可以验证有线性组合 (参照定理 19 的证明)：

$$f(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g^{-1}xg)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,j,k}c_{ijk}\varphi_{k,ij}(g^{-1}xg)=\sum_{i,j,k}c_{ijk}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{k,ij}(g^{-1}xg)$$

$$=\sum_{i,j,k}c_{ijk}\Big[\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{k,g^{-1}}\varphi_{k,x}\varphi_{k,g}\Big]_{ij}=\sum_{i,j,k}c_{ijk}[P(\varphi_{k,x})]_{ij}=\sum_{i,j,k}c_{ijk}\frac{\mathrm{tr}(\varphi_{k,x})}{\deg(\varphi_k)}E_{ij}=\sum_{i,k}\Big(c_{iik}\frac{1}{\deg(\varphi_k)}\Big)\chi_{\varphi_k}(x).■$$

定义 26(直和分解与重数) 如果表示 $\rho\sim\bigoplus_{i=1}^s(m_i\varphi_i)$，其中所有 φ_i 不可约、$i\neq j\Rightarrow\varphi_i\nsim\varphi_j$ 且 $m_i\varphi_i:=\varphi_i\oplus\cdots\oplus\varphi_i$(即把不可约表示 φ_i 直和 m_i 次)，那么 m_i 称为是 ρ 中 φ_i 的**重数**. 如果 $m_i>0$，则称 φ_i

是 ρ 的一个**不可约成分**. 此时显然有 $\deg(\rho)=\sum m_i\deg(\varphi_i)$. 定理 11 告诉我们，所有复表示完全可约，因此上述直和分解总是存在，但分解的唯一性还未知，这关系到该定义是否良好. 为断言唯一性 (定理 28)，我们利用特征标理论给出分析.

引理 27 设 $\varphi=\rho\oplus\psi$，那么显然有 $\chi_\varphi=\chi_\rho+\chi_\psi$. 因此任何特征标都是一些不可约特征标的整线性组合.

定理 28(唯一性) 设表示 $\rho\sim\bigoplus_{i=1}^s(m_i\varphi_i)$，那么重数 $m_i=\langle\chi_\rho,\chi_{\varphi_i}\rangle$，因此 ρ 的直和分解在等价的意义下唯一 (因为等价的表示有相同的特征标). 兹断言定义 26 确实良好.

证明思路 由引理 27，$\chi_\rho=\sum_{i=1}^s m_i\chi_{\varphi_i}$. 根据定理 24，$\langle\chi_\rho,\chi_{\varphi_i}\rangle=\sum_{j=1}^s m_j\langle\chi_{\varphi_j},\chi_{\varphi_i}\rangle=m_i$.■

推论 29 复表示 ρ 不可约当且仅当 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=1$.

证明思路 设 $\rho\sim\bigoplus_{i=1}^s(m_i\varphi_i)$，那么 $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=m_1^2+\cdots+m_s^2$.■

作为直和分解的一个可计算的例子，我们介绍一下正则表示：

定义 30(正则表示) 设 X 是有限集，定义由 X 生成的线性空间为 $\mathbb{C}X:=\{\sum_{x\in X}c_x x:c_x\in\mathbb{C}\}$，其上的运算均是逐点定义. 线性空间 $\mathbb{C}X$ 上可以配备内积 $\langle\sum_{x\in X}a_x x,\sum_{x\in X}b_x x\rangle:=\sum_{x\in X}a_x\overline{b_x}$ 使之成为内积空间. 有限群 G 的 **(左) 正则表示**是指同态 $\mathcal{L}:G\to GL(\mathbb{C}G),\mathcal{L}_g\big(\sum_{h\in G}c_h h\big):=\sum_{h\in G}c_h gh=\sum_{x\in G}c_{g^{-1}x}x$. 类似地通过右乘可以定义 (右) 正则表示 $\mathcal{R}$，不过为图方便本文的讨论都以 (左) 正则表示为例. 事实上验证定义可知正则表示是酉表示 (即任意 $\mathcal{L}_g$ 保持内积). 特别地，我们甚至可以描述清楚它的分解及其相关特性：

定理 31 设 $\mathcal{L}$ 是 G 的正则表示，则存在分解 $\mathcal{L}\sim\bigoplus_{i=1}^s\big(\deg(\varphi_i)\varphi_i\big)$，其中 φ_i 是不可约 (酉) 表示且两两不等价.

证明思路 根据定理 28，问题转化为 $\langle\chi_{\mathcal{L}},\chi_{\varphi_i}\rangle$ 的计算. 通过线性代数的操作易得 $\chi_{\mathcal{L}}(g)=\begin{cases}|G| & g=1\\ 0 & g\neq 1\end{cases}$，据此照定义 18 给予的内积表达式验证得 $\langle\chi_{\mathcal{L}},\chi_{\varphi_i}\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathcal{L}}(g)\overline{\chi_{\varphi_i}(g)}=\frac{1}{|G|}|G|\overline{\chi_{\varphi_i}(1)}=\deg(\varphi_i)$.■

推论 32 依照定理 31 有 $\chi_{\mathcal{L}}=\sum_{i=1}^s\deg(\varphi_i)\chi_{\varphi_i}$，取其在 $g=1$ 处的值得等式 $|G|=\sum_{i=1}^s\deg(\varphi_i)^2$. 据此计算维数可知通过推论 20 得到的正交集 $\{\varphi_{k,ij}:k=1,\cdots,s;i,j=1,\cdots,\deg(\varphi_k)\}$ 实际上是 $L(G)$ 的一组基.

下面我们给出特征标表的概念.

定义 33(特征标表) 设 G 是有限群，取出它的所有不可约特征标为 $\chi_1,\cdots,\chi_s$. 定理 25 告诉我们 $s=|C(G)|$. 再设 G 的共轭类为 $C_1,\cdots,C_s$. 在这个条件下，群 G 的**特征标表**是指 $s\times s$ 阶矩阵 $\Lambda_{ij}:=\chi_i(C_j)$.

定理 34(正交关系 II) 特征标表的列向量在 $\mathbb{C}$ 的标准内积下两两正交，因此特征标表是可逆矩阵.

证明思路 即计算 $\sum_{i=1}^s\chi_i(C)\overline{\chi_i(C')}$ 或者 $\sum_{i=1}^s\chi_i(g)\overline{\chi_i(h)}$. 回顾命题 23 证明中定义的类函数 δ_C，注意到 $\{\delta_C:C\in C(G)\}$ 与 $\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$ 是内积空间 $Z(L(G))$ 的两组基，线性代数告诉我们成立等式 $\delta_C=\sum_{i=1}^s\langle\delta_C,\chi_i\rangle\chi_i$. 此时对某个 $h\in C$，有：

$$\delta_C(g)=\sum_{i=1}^s\langle\delta_C,\chi_i\rangle\chi_i(g)=\sum_{i=1}^s\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\delta_C(x)\overline{\chi_i(x)}\chi_i(g)=\sum_{i=1}^s\frac{1}{|G|}\sum_{x\in C}\overline{\chi_i(x)}\chi_i(g)=\frac{|C|}{|G|}\sum_{i=1}^s\chi_i(g)\overline{\chi_i(h)}.$$

上式当 $g\in C$ 时为 1，其余为 0.■

事实上，特征标表是线性空间 $Z(L(G))$ 中，正交基 $\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$ 到正交基 $\{\delta_C:C\in C(G)\}$ 的过渡矩阵.

作为一个例子，我们尝试计算一下 Abel 群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的特征标表. 在这之前我们解决一个更广的问题：如何在等价的意义下确定任意有限 Abel 群的所有不可约复表示? 根据有限 Abel 群的结构定理 (有限 Abel 群一定同构于若干剩余类群的直和)，在知悉 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的所有不等价的不可约复表示就是 $\varphi_k:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*,[m]\mapsto e^{2km\pi\,\mathrm{i}/n}(k=0,\cdots,n-1)$ 的前提下，不失一般性只需讨论两个 Abel 群直和的情况.

命题 35 设 G_1,G_2 都是有限 Abel 群，若记它们的所有不等价不可约 (1 维) 复表示分别为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{|G_1|}$ 和 $\psi_1,\cdots,\psi_{|G_2|}$，那么所有复值函数 $\alpha_{ij}:G_1\times G_2\to\mathbb{C}^*,(g_1,g_2)\mapsto\varphi_i(g_1)\psi_j(g_2)$ 确定了 $L(G_1\times G_2)$ 的一组基.

证明思路 验证 α_{ij} 是同态是容易的. 注意到有 $\langle\alpha_{ij},\alpha_{kl}\rangle=\frac{1}{|G_1||G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}\alpha_{ij}(g_1,g_2)\overline{\alpha_{kl}(g_1,g_2)}=\big(\frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}\varphi_i(g_1)\overline{\varphi_k(g_1)}\big)\cdot\big(\frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2}\psi_j(g_2)\overline{\psi_l(g_2)}\big)=\langle\varphi_i,\varphi_k\rangle\langle\psi_j,\psi_l\rangle$，因此含有 $|G_1\times G_2|$ 个元素的集合 $\{\alpha_{ij}:i=1,\cdots,|G_1|;j=1,\cdots,|G_2|\}$ 是正交的，据定理 24 和定理 25 知该集合就是 $G_1\times G_2$ 的所有不等价不可约复表示.■

例 我们已经知道，群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的两个不等价不可约复表示为 $\varphi_0:[0],[1]\mapsto 1,1$ 和 $\varphi_1:[0],[1]\mapsto 1,-1$，

其特征标表是 $\begin{pmatrix} \chi_{\varphi_0}[0] & \chi_{\varphi_0}[1] \\ \chi_{\varphi_1}[0] & \chi_{\varphi_1}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 据此依照命题 35 计算得 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的特征标表为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 关于群论和特征标理论更多有用的事实见网站 [10].

定义 4 给出了同一个群 G 上两个表示直和的概念，这是一种构造新表示的办法. 而接下来我们要介绍另一种办法 (当然还有很多其他办法)：张量积和外张量积. 有了这个概念之后，我们顺带可以给出命题 35 在一般情形下的推广 (命题 38).

定义 36(张量积) 设 $\varphi : G \to GL(V)$ 和 $\psi : G \to GL(W)$ 是 G 的两个复表示. 定义 φ 和 ψ 的**张量积表示**为 $\varphi \otimes \psi : G \to GL(V \otimes_{\mathbb{C}} W), g \mapsto \varphi(g) \otimes \psi(g)$(注意 $(\varphi_g \otimes \psi_g)(v \otimes w) = \varphi_g(v) \otimes \psi_g(w)$). 容易验证其是良好定义的. 倘若取 $V = \mathbb{C}^n, W = \mathbb{C}^m$，那么 $\chi_{\varphi\otimes\psi}(g) = \mathrm{tr}\big((\varphi \otimes \psi)_g\big) = \mathrm{tr}(\varphi_g \otimes \psi_g) = \mathrm{tr}(\varphi_g) \cdot \mathrm{tr}(\psi_g) = \chi_\varphi(g) \cdot \chi_\psi(g)$，套用下面定义 44 中规定的乘法运算，我们有 $\chi_{\varphi\otimes\psi} = \chi_\varphi \cdot \chi_\psi$. 这也就是说，群 G 的两个特征标的乘积仍是 G 的一个特征标.

定义 37(外张量积) 设 $\varphi_1 : G_1 \to GL(V), \varphi_2 : G_2 \to GL(W)$ 是复表示，定义 φ_1 和 φ_2 的 **(外) 张量积表示**为群 $G_1 \oplus G_2$ 的复表示 $\varphi_1 \boxtimes \varphi_2 : G_1 \oplus G_2 \to GL(V \otimes_{\mathbb{C}} W), (\varphi_1 \boxtimes \varphi_2)(g_1, g_2)(v \otimes w) := \varphi_1(g_1)(v_1) \otimes \varphi_2(g_2)(v_2)$.

命题 38 设 G_1, G_2 都是有限群，若记它们的所有不等价不可约复表示分别为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 和 $\psi_1, \cdots, \psi_t$，则 $\{\varphi_i \boxtimes \psi_j : i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, t\}$ 正好是 $G_1 \oplus G_2$ 的所有不等价不可约复表示. 此外，若 G_1, G_2 的特征标表分别为 Λ_1, Λ_2，则 $G_1 \oplus G_2$ 的特征标表为矩阵的张量 $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$.

证明参考 见 [11] 命题 2.3.23.■

对于非 Abel 的有限群，[2] 中推论 1.5.1 还有如下描述：

命题 39(提升) 设 G 是有限群，则 G 的所有不等价不可约 1 维复表示有 $[G : G']$ 个([1] 引理 6.2.7 断言：若 G' 是 G 的换位子群，则存在一一对应 $\{G\text{的 1 次复表示}\} \leftrightarrow \{\text{Abel 群}G/G'\text{的不可约复表示}\}, \varphi \to \underset{gG' \mapsto \varphi(g)}{G/G' \to \mathbb{C}^*}, \psi\pi \leftarrow \psi$，其中 $\pi : G \to G/G'$ 是典范同态. 因此 G 有 $|G/G'| = [G : G']$ 个 1 维复表示).

接下来，作为本节的结束，我们介绍一些特征标表在群论中的应用.

命题 40 (1) 设 N 是有限群 G 的正规子群，又设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 是 G 的所有不等价不可约复表示，则 N 一定是若干个 $\ker(\varphi_i)$ 的交. 容易验证 $\ker(\varphi_i) = \{g \in G : \chi_{\varphi_i}(g) = \chi_{\varphi_i}(1)\}$，这给出了用特征标表计算 G 所有正规子群的一个方法. 特别地由命题 39，G 的换位子群是所有 1 次复表示的核的交.

(2) 往后看看 Burnside 定理 (定理 49) 证明中断言 iii 的证明方法，我们还可以用特征标表判断群是否为单群：设 G 是有限群，$\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 是 G 的所有不等价不可约复表示，则 G 是单群的充要条件为这些 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 中除了平凡表示外，其余所有 $\ker(\varphi_i) = \{1\}$.

(3) 由定理 34，可以从特征标表求出 G 共轭类里的元素个数：$|C_g| = \frac{|G|}{\sum_{i=1}^s \chi_i(g)\overline{\chi_i(g)}}$. 特别地，我们还可以计算 G 的中心：由于正规子群 $Z(G)$ 中元素共轭类的势均为 1，因而 $Z(G)$ 就是使 $|C_g| = 1$ 的所有 g 的并.

证明参考 见 [2]Chapter3.4，此书该章节还展示了一些其他的应用.■

注意 特征标表相同的两个群不一定同构. 例如二面体群与四元数群.

2、有限群上的 Fourier 分析

本节的目标是建立有限群上的 Fourier 分析理论，所有定义与结论均是标准 Fourier 理论的变形.

定义 41(卷积) 设 G 是有限群，$a, b \in L(G)$.a 和 b 的**卷积**是指映射 $a * b : G \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{y\in G} a(xy^{-1})b(y)$. 显然 $a * b \in L(G)$，我们希望在这个卷积运算下线性空间 $L(G)$ 还有其他的结构.

命题 42 $\big(L(G), +, *\big)$ 是含幺环.

证明思路 结合律由等式 $[(a * b) * c](x) = \sum_{y\in G}[a * b](xy^{-1})c(y) = \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} a(xy^{-1}z^{-1})b(z)c(y) = \sum_{y\in G}\sum_{u\in G} a(xu^{-1})b(uy^{-1})c(y) = \sum_{u\in G} a(xu^{-1})\sum_{y\in G} b(uy^{-1})c(y) = \sum_{u\in G} a(xu^{-1})[b*c](u) = [a*(b*c)](x)$

给出，分配律显然. 对于幺元的存在性，定义 $\delta_g(x)=\begin{cases}1 & x=g\\ 0 & x\neq g\end{cases}$，等式 $a*\delta_1(x)=\sum_{y\in G}a(xy^{-1})\delta_1(y)=a(x)$ 告诉我们 δ_1 就是单位.■

命题 43 $L(G)$ 作为环，其中心正是 $Z(L(G))$. 因此当 G 是 Abel 群时，$L(G)$ 是一个交换 $\mathbb{C}$-代数.

证明思路 设 f 是类函数，于是有 $f*a(x)=\sum_{y\in G}f(y^{-1}x)a(y)=\sum_{z\in G}f(z)a(xz^{-1})=a*f(x)$. 反过来，设 f 满足对任意 $\delta_z\in L(G)$，$\delta_z*f=f*\delta_z$，那么有 $f(z^{-1}x)=f(xz^{-1})(\forall x,z\in G)$，此时取 $x=yz$ 即可.■

$L(G)$ 上有了卷积运算之后，我们便可给出 Fourier 变换. 确切的说，它既是一个 $\mathbb{C}$-线性空间同构，也是一个环同构 (定理 45、定理 46).

首先考虑有限 Abel 群的情形.

定义 + 命题 44(对偶群) 设 G 是有限 Abel 群. 容易验证集合 $\widehat{G}:=\{\chi:G\to\mathbb{C}^*|\chi\text{是不可约特征标}\}$ 在配备了运算 $(\chi_1\cdot\chi_2)(g):=\chi_1(g)\chi_2(g)$ 之后作成一个阶为 $|G|$ 的 Abel 群，称为 G 的**对偶群**(事实上，由于 G 是 Abel 群，可以发现 $\widehat{G}$ 中的元素无非就是所有的群同态 $G\to S^1$，由此关于对偶群封闭性的验证即是显然).

证明思路 封闭：由定义 36 给出；结合律和交换律显然；单位元是 $\chi:g\mapsto 1(\forall g\in G)$；$\chi$ 的逆元是 $\overline{\chi}$.■

定理 45(Abel 群的 Fourier 变换) 设 $f:G\to\mathbb{C}$ 是复值函数，定义其 **Fourier 变换**为 $\widehat{f}:\widehat{G}\to\mathbb{C},\chi\mapsto|G|\langle f,\chi\rangle=\sum_{g\in G}f(g)\overline{\chi(g)}$(读者不妨将其与数学分析中的 Fourier 系数对应起来). 函数 $\widehat{f}$ 在每个不可约特征标(基)χ 处的取值称为 f 的 **Fourier 系数**. 在这个定义下，我们有：

(1) 由于不可约特征标 χ 也是复值函数，因此定理 24 蕴含 $\widehat{\chi}(\rho)=\begin{cases}|G| & \chi=\rho\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，即 $\widehat{\chi}=|G|\delta_\chi$；

(2) 根据线性代数的等式 $f=\sum_\chi\langle f,\chi\rangle\chi$，我们有逆变换：若 $f\in L(G)$，则 $f=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\widehat{f}(\chi)\chi$(此即 Fourier 展开，读者不妨将其与数学分析中的 Fourier 展开对应起来，展开式各项的系数就是 Fourier 系数)；

(3) 由于逆变换的存在，我们有 $\mathbb{C}$-线性空间的同构 $L(G)\to L(\widehat{G})\cong\mathbb{C}^{|G|},f\mapsto\widehat{f}$；

(4) 规定 $L(\widehat{G})$ 上的乘法为逐点相乘 $(\widehat{f}\cdot\widehat{g})(x):=\widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$ 使之成为一个交换幺环 (单位是常值映射 $x\mapsto 1$)，那么上述同构诱导了交换幺环的同构 $\big(L(G),+,*\big)\to\big(L(\widehat{G}),+,\cdot\big)\cong(\mathbb{C}^{|G|},+,\cdot),f\mapsto\widehat{f}$. 此时这还是一个交换 $\mathbb{C}$-代数同构.

证明思路 只证 (4)，只需要证明 $\widehat{a*b}=\widehat{a}\cdot\widehat{b}$ 即可. 这由下式给出：

$$\widehat{a*b}(\chi)=\sum_{y\in G}b(y)\sum_{x\in G}a(xy^{-1})\overline{\chi(x)}=\sum_{y\in G}b(y)\sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(z)\chi(y)}=\sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(z)}\sum_{y\in G}b(y)\overline{\chi(y)}=\widehat{a}(\chi)\widehat{b}(\chi).■$$

例 设 $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 满足：存在正整数 n，$f(n+x)=f(x),g(n+x)=g(x)(\forall x\in\mathbb{Z})$，$\overline{f},\overline{g}:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 为其自然的诱导映射. 此时我们利用有限 Abel 群的 Fourier 理论将关于 $\overline{f},\overline{g}$ 的公式过渡到 f,g 上 (即限定在一个周期内，这与数学分析中周期函数的 Fourier 理论类似). 分别依据定义 41、定义 44 和定理 45，我们得到：$(f*g)(m):=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{f}([m-k])\overline{g}([k])=\sum_{k=0}^{n-1}f(m-k)g(k)$，$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}=\{\chi_k:[m]\mapsto e^{2\pi\,\mathrm{i}km/n}|k=0,\cdots,n-1\}\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\chi_l\leftrightarrow[l]$. 函数 f 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(l):=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{f}([k])\overline{\chi_l([k])}=\sum_{k=0}^{n-1}f(k)e^{-2\pi\,\mathrm{i}lk/n}$，此时逆变换 $f(l)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{\overline{f}}([k])\chi_k([l])=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)e^{2\pi\,\mathrm{i}lk/n}$.

接下来直接给出有限非 Abel 群一般情形的结论，证明略过 (有限 Abel 群情形的特殊性在于其不可约复表示都是 1 维的).

定理 46(非 Abel 群的 Fourier 变换) 设 G 是有限群，记 G 的所有不等价的不可约复 (酉) 表示为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$. 定义映射 $T:L(G)\to\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_1)}(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_s)}(\mathbb{C}),f\mapsto\big(\widehat{f}(\varphi_1),\cdots,\widehat{f}(\varphi_s)\big)$，其中 $\widehat{f}(\varphi_k)_{ij}:=|G|\langle f,\varphi_{k,ij}\rangle=\sum_{g\in G}f(g)\overline{\varphi_{k,ij}(g)}$. 称 $T(f)$ 为 f 的 **Fourier 变换**. 在这个定义下，我们有：

(1) 逆变换：若 $f\in L(G)$，则 $f=\frac{1}{|G|}\sum_{i,j,k}\deg(\varphi_k)\widehat{f}(\varphi_k)_{ij}\varphi_{k,ij}$；

(2) 由于逆变换的存在，我们有 $\mathbb{C}$-线性空间的同构 $L(G)\to\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_1)}(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_s)}(\mathbb{C}),f\mapsto T(f)$；

(3) 规定 $\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_1)}(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_s)}(\mathbb{C})$ 上的乘法为逐点相乘使之成为一个含幺环，那么上述同构诱导了含幺环的同构 $\big(L(G),+,*\big)\to\big(\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_1)}(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathrm{Mat}_{\deg(\varphi_s)}(\mathbb{C}),+,\cdot\big),f\mapsto T(f)$.

例 关于这套 Fourier 理论的一个实际应用见 [4]. 由于其涉及到大量数理统计，限于篇幅按下不表.

3、两巨头

本节主要利用表示论的技巧证明群论中的两个重要定理 (定理 47，定理 49)，并介绍它们的应用.

定理 47(维数) 设 φ 是有限群 G 的一个不可约复表示，那么 $\deg(\varphi)\big||G|$.

证明思路 依次证明如下断言：**(断言 i)** 设 χ 是 G 的一个特征标，那么对任意 $g\in G$，$\chi(g)$ 是代数整数 (即它属于 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的整闭包). 考虑表示 $\varphi: G\to GL(\mathbb{C}^n)$，由于 $g^{|G|}=1$，因此 $\varphi_g^{|G|}=E$. 根据推论 17，φ_g 可对角化且特征值是一些 $|G|$ 次单位根 (它们是代数整数)，因此 $\chi_\varphi(g)=\mathrm{tr}(\varphi_g)$ 当然也是代数整数.

(断言 ii) 设 φ 是有限群 G 的不可约复表示，$g\in G$，那么 $\frac{|C_g|\chi_\varphi(g)}{\deg(\varphi)}$ 是代数整数. 设 G 的共轭类为 $C_1,\cdots,C_s$. 定义算子 $T_i:=\sum_{x\in C_i}\varphi_x$，显然对任意 $g\in G$，$\varphi_g T_i=\sum_{x\in C_i}\varphi_g\varphi_x=\sum_{x\in C_i}\varphi_{gx}=\sum_{y\in gC_i}\varphi_y=\sum_{y\in C_ig}\varphi_y=\sum_{x\in C_i}\varphi_{xg}=T_i\varphi_g$，故 $T_i\in\mathrm{Hom}_G(\varphi,\varphi)$. 由引理 15 知存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $T_i=\lambda E$，因此 $\deg(\varphi)\lambda=\mathrm{tr}(\lambda E)=\mathrm{tr}(T_i)=\sum_{x\in C_i}\mathrm{tr}(\varphi_x)=\sum_{x\in C_i}\chi_\varphi(x)=|C_i|\chi_\varphi(C_i)$，即 $T_i=\frac{|C_i|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_i)E$. 此外，我们有等式 $T_iT_j=\sum_{x\in C_i}\varphi_x\sum_{y\in C_j}\varphi_y=\sum_{x\in C_i,y\in C_j}\varphi_{xy}=\sum_{g\in G}a_{ijg}\varphi_g=\sum_{k=1}^s\sum_{g\in C_k}a_{ijg}\varphi_g=\sum_{k=1}^s a_{ijk}\sum_{g\in C_k}\varphi_g=\sum_{k=1}^s a_{ijk}T_k$，其中 $a_{ijg},a_{ijk}\in\mathbb{Z}$(第五个等号是因为 a_{ijg} 不依赖于共轭类中代表元 g 的选取：定义 $\Omega_g:=\{(x,y)\in C_i\times C_j: xy=g\}$，则 $a_{ijg}=|\Omega_g|\in\mathbb{Z}$. 考虑与 g 共轭的 $g'=fgf^{-1}$，验证 $\Omega_g\to\Omega_{g'},(x,y)\mapsto(fxf^{-1},fyf^{-1})$ 是良好定义的双射即可). 由该等式结合 $T_i=\frac{|C_i|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_i)E$ 立即推出 $\frac{|C_i|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_i)\cdot\frac{|C_j|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_j)=\sum_{k=1}^s a_{ijk}\frac{|C_k|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_k)$，代数数论告诉我们 $\frac{|C_g|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_g)$ 是代数整数 (注意到整系数矩阵的特征值一定是代数整数，因此 yy_i 是 y_i 的整系数线性组合蕴含 y 是代数整数).

(断言 iii) 定理 47 成立. 由定理 24，$\frac{|G|}{\deg(\varphi)}=\sum_{g\in G}\frac{\chi_\varphi(g)}{\deg(\varphi)}\overline{\chi_\varphi(g)}$. 设 $C_1,\cdots,C_s$ 是 G 的所有共轭类，前式蕴含 $\frac{|G|}{\deg(\varphi)}=\sum_{i=1}^s\sum_{g\in C_i}\frac{\chi_\varphi(g)}{\deg(\varphi)}\overline{\chi_\varphi(g)}=\sum_{i=1}^s\sum_{g\in C_i}\frac{\chi_\varphi(C_i)}{\deg(\varphi)}\overline{\chi_\varphi(C_i)}=\sum_{i=1}^s\frac{|C_i|}{\deg(\varphi)}\chi_\varphi(C_i)\overline{\chi_\varphi(C_i)}$，而根据断言 i 和断言 ii，这是一个代数整数. 由于有理数中的代数整数一定是整数，因此 $\frac{|G|}{\deg(\varphi)}\in\mathbb{Z}$.■

我们来看看该定理在 p 群理论中的一个应用.

推论 48 设 G 是 p^2 阶群，p 是素数，则 G 一定是 Abel 群.

证明思路 设 G 的所有不可约复表示为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$(在等价的意义下)，根据定理 47，$\deg(\varphi_i)$ 在 $1,p,p^2$ 中取值. 由推论 32 知 $p^2=|G|=\sum_{i=1}^s\deg(\varphi_i)^2$，注意到 G 一定有维数 1 的平凡表示，故这些 φ_i 全都只能是 1 维的，因此 $s=|G|$. 利用定理 25 得 G 是 Abel 群.■

定理 49(Burnside$^{\mathbf{1st}}$) 设 G 是 p^aq^b 阶群，p,q 均是素数，$a,b\geq 0$，则 G 可解.

证明思路 将证明分解为如下步骤：**(断言 i)** 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是一些 n 次单位根，则 $|\lambda_1+\cdots+\lambda_s|\leq s$，当且仅当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_s$ 时取等号. 这是显然的.

(断言 ii) 设 G 是有限群，C 是 G 的某个共轭类，又设 $\varphi: G\to GL(\mathbb{C}^s)$ 是不可约复表示，s 与 $|C|$ 互素，则要么存在 $\lambda\in\mathbb{C}^*$ 使得对任意 $g\in C$ 均有 $\varphi_g=\lambda E$；要么任意 $g\in C$ 均有 $\chi_\varphi(g)=0$. 由推论 17 知 φ_g 可对角化且特征值是 s 个 $|G|$ 次单位根，这些单位根之和即 $\chi_\varphi(g)$. 依照断言 i，$|\chi_\varphi(g)|\leq s$. 设存在 $u,v\in\mathbb{Z}$ 使得 $u|C|+vs=1$，那么 $u\frac{|C|}{s}\chi_\varphi(g)+v\chi_\varphi(g)=\frac{\chi_\varphi(g)}{s}$. 定理 47 证明中的断言 i、断言 ii 告诉我们 $\chi_\varphi(g),\frac{|C|}{s}\chi_\varphi(g)$ 均是代数整数，因此 $\frac{\chi_\varphi(g)}{s}$ 也是代数整数. 设它在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的极小首一多项式为 $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$(见 [5] 推论 5)，Galois 理论告诉我们 $p(x)$ 所有根相乘得到的 $R\in\mathbb{Q}$，加上它还是代数整数，故 $R\in\mathbb{Z}$. 设 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[e^{2\pi\,\mathrm{i}/|G|}]/\mathbb{Q})$，由断言 i 知 $\left|\sigma\left(\frac{\chi_\varphi(g)}{s}\right)\right|=\left|\frac{\sigma(\chi_\varphi(g))}{s}\right|=\frac{|\sigma(\mathrm{tr}(\varphi_g))|}{s}\leq 1$，因此 $|R|=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[e^{2\pi\,\mathrm{i}/|G|}]/\mathbb{Q})}\left|\sigma\left(\frac{\chi_\varphi(g)}{s}\right)\right|\leq 1$，这意味着 $|R|$ 只能在 0 或 1 中取值，其因子 $\left|\frac{\chi_\varphi(g)}{s}\right|$ 亦然，即断言 ii 中所述的两种情况.

(断言 iii) 设 G 是有限群，若存在某个共轭类 C 使得 $|C|=p^t$，p 是素数且 $t\geq 1$，则 G 一定不是单群. 取出 G 的所有不等价的不可约复表示为 $\underset{g\,\mapsto\,1}{G\overset{\varphi_1}{\to}\mathbb{C}^*}$(平凡表示)$,\cdots,\varphi_s$. 依照定理 31 考虑正则表示及其分解 $\mathcal{L}\sim\bigoplus_{i=1}^s\deg(\varphi_i)\varphi_i$，由此式立得 $\chi_{\mathcal{L}}(g)=1+\sum_{i=2}^s\overline{\chi_{\varphi_i}(1)}\chi_{\varphi_i}(g)$. 取 $1\neq g\in C$(注意单位元的共轭类只有它自己)，由定理 34 上式 $=0$. 因此可设存在 $2\leq r\leq s$ 使得 $\chi_{\varphi_i}(g)\neq 0, i=2,\cdots,r$，其余为 0. 此外，若对每个 $2\leq i\leq r$ 都有 $p|\chi_{\varphi_i}(1)$，设 $\chi_{\varphi_i}(1)=k_ip$，则仍由上式可得 $\frac{1}{p}=-\sum_{i=2}^r k_i\chi_{\varphi_i}(g)$，这右边是一个代数整数，因此 $\frac{1}{p}\in\mathbb{Z}$，显然不可能. 所以存在 $2\leq a\leq r$ 使得 $p\nmid\chi_{\varphi_a}(1)$，即 $\big(|C|,\chi_{\varphi_a}(1)\big)=1$. 根据断言 ii，只能出现前一种情况，即 $\varphi_a(g)=\lambda E$. 倘若 G 是单群，此时 $\ker(\varphi_i)=\{1\}(i>1)$，故 φ_a 只能是单射，即 $G\cong\mathrm{Im}(\varphi_a)$. 而 $\varphi_a(g)$ 作为一个矩阵一定落在 $Z\big(\mathrm{Im}(\varphi_a)\big)$ 之中，这推出 $g\in Z(G)$ 从而 $|C|=|C_g|=|G|$，与单位元单独成类矛盾. 故 G 非单.

(断言 iv)定理 49 成立. 若 $|G|=p^a$，显然它可解 (有限 p 群皆可解). 于是只需讨论 $p\neq q,a>0,b>0$ 的情况. 对 $|G|$ 作归纳法. 根据 Sylow 定理，G 有 q^b 阶子群 H. 取 $1\neq g\in Z(H)$，则 $H\subseteq\{x\in G:xg=gx\}:=\Delta_g$(共轭作用下的稳定子群). 因此 $p^a=[G:H]=[G:\Delta_g]\cdot[\Delta_g:H]$，这推出 $[G:\Delta_g]=p^l$，其中 $l\geq 0$. 如果 $l=0$，则 $G=\Delta_g$，此时取正规子群 $\langle g\rangle$，由归纳假设 $\langle g\rangle$ 与 $G/\langle g\rangle$ 可解得 G 可解. 当 $l>0$ 时，注意到 $[G:\Delta_g]$ 实际上就是 $g\in G$ 的共轭元个数 (或 g 所在轨道的长度)，根据断言 iii 知 G 非单. 再运行一遍归纳假设知 G 可解 (实际上我们在证明 p^aq^b 阶非单群可解).■

关于可解群，Burnside 还有如下猜想：

猜想 + 定理 50(Burnside-Feit-Thompson) 奇数阶群皆可解.

这个猜想于 1964 年被 W.Feit 和 J.G.Thompson 解决 (后称 Feit-Thompson 定理)，证明长达 255 页，见 [6] 和 [7]. 该猜想的解决直接大大推进了有限单群的分类工作，于 1983 年被 D.Gorenstein 声称解决，算上之前所有人的工作，整个有限单群分类定理的证明传闻长达五千多页，证明前后的故事像小说一样此起彼伏精彩纷呈，见 [8] 和 [9]. 但是这个超长证明的正确性貌似至今无明确定论，幸运的是它是否正确都与我无关.

定理 51(Burnside$^{\mathbf{2st}}$) 设 G 是奇数阶群，若以 s 记 G 共轭类的个数，那么有 $s\equiv|G|(\mathrm{mod}\ 16)$.

证明参考 这个证明需要用到实表示的概念，见 [1]Chapter9，本文限于篇幅暂且略过.■

4、诱导表示

本节考虑这样的问题：设 H 是有限群 G 的子群，如何将 G 上的表示论限制到子群 H 上? 反过来又如何将子群 H 上的表示论过渡到大群 G? 在知悉方法之后，这些操作前后的特征标又有什么关系? 我们将建立诱导表示的理论来回答这几个问题.

定义 52(限制) 设 $f:G\to\mathbb{C}$ 是一个复值函数，H 是 G 的子群，则可将 f **限制**到 H 上得到新的复值函数 $\mathrm{Res}_H^Gf:H\to\mathbb{C},h\mapsto f(h)$. 容易验证 $\mathrm{Res}_H^G:Z(L(G))\to Z(L(H)),f\mapsto\mathrm{Res}_H^Gf$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射.

定义 + 命题 53(诱导) 设 $H\subseteq G$. 定义 $\mathbb{C}$-线性映射 $L(H)\to L(G),f\mapsto\widetilde{f}:=\begin{cases}f(x) & x\in H\\ 0 & x\notin H\end{cases}$. 再定义映射 $\mathrm{Ind}_H^G:Z(L(H))\to Z(L(G)),\mathrm{Ind}_H^Gf(g):=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\widetilde{f}(x^{-1}gx)$，称为 f 的**诱导**. 这仍是一个 $\mathbb{C}$-线性映射.

Res 和 Ind 之间具有下述被称为 Frobenius 对换的联系：

定理 54(Frobenius) 设 $H\subseteq G$，f,g 分别是 H,G 上的类函数，则有公式 $\langle\mathrm{Ind}_H^Gf,g\rangle=\langle f,\mathrm{Res}_H^Gg\rangle$.

证明思路 根据定义，有

$$\langle\mathrm{Ind}_H^Gf,g\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\mathrm{Ind}_H^Gf(x)\overline{g(x)}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\widetilde{f}(y^{-1}xy)\overline{g(x)}$$

$$=\frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{y\in G}\sum_{x\in G}\widetilde{f}(y^{-1}xy)\overline{g(x)}=\frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{y\in G}\sum_{z\in H}f(z)\overline{g(z)}=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\langle f,\mathrm{Res}_H^Gg\rangle=\langle f,\mathrm{Res}_H^Gg\rangle.■$$

命题 55 设 $H\subseteq G$ 是子群，G 有左陪集分解 $G=\bigsqcup_{i=1}^m t_iH$，则对任意 $f\in Z(L(H))$，有 $\mathrm{Ind}_H^Gf(g)=\sum_{i=1}^m\widetilde{f}(t_i^{-1}gt_i)$.

证明思路 按照定义直接计算即可：$\mathrm{Ind}_H^Gf(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\widetilde{f}(x^{-1}gx)=\frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m\sum_{h\in H}\widetilde{f}(h^{-1}t_i^{-1}gt_ih)=\frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m\sum_{h\in H}\widetilde{f}(t_i^{-1}gt_i)=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sum_{i=1}^m\widetilde{f}(t_i^{-1}gt_i)=\sum_{i=1}^m\widetilde{f}(t_i^{-1}gt_i)$.■

设 $\varphi:G\to GL(V)$ 是 G 的复表示，H 是 G 的子群，那么 φ 可自然地从 G 限制到 H 上得到**限制表示**$\mathrm{Res}_H^G\varphi:H\to GL(V)$. 如果 $h\in H$，那么还成立等式 $\chi_{\mathrm{Res}_H^G\varphi}(h)=\mathrm{tr}(\mathrm{Res}_H^G\varphi(h))=\mathrm{tr}(\varphi_h)=\chi_\varphi(h)=\mathrm{Res}_H^G\chi_\varphi(h)$. 因此我们有 $\chi_{\mathrm{Res}_H^G\varphi}=\mathrm{Res}_H^G\chi_\varphi$，即特征标的限制仍为特征标. 当然，我们也有诱导表示的概念，它也满足特征标的诱导仍为特征标 (定义 + 定理 56)，只是构造较为复杂.

定义 + 定理 56 设 H 是 G 的子群且 $[G:H]=m$，又设 G 有左陪集分解 $G=\bigsqcup_{i=1}^m t_iH$(不失一般性设 $t_1=1$)，$\varphi:H\to GL(\mathbb{C}^n)$ 是 H 的复表示，定义 G 上的映射 $\widetilde{\varphi}(x):=\begin{cases}\varphi(x) & x\in H\\ O & x\notin H\end{cases}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$，那么映射

$$\mathrm{Ind}_H^G\varphi: G\to GL(\mathbb{C}^{mn}), g\mapsto \big(\widetilde{\varphi}(t_i^{-1}gt_j)\big)_{ij}=\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}(t_1^{-1}gt_1) & \widetilde{\varphi}(t_1^{-1}gt_2) & \cdots & \widetilde{\varphi}(t_1^{-1}gt_m)\\ \widetilde{\varphi}(t_2^{-1}gt_1) & \widetilde{\varphi}(t_2^{-1}gt_2) & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \widetilde{\varphi}(t_{m-1}^{-1}gt_m)\\ \widetilde{\varphi}(t_m^{-1}gt_1) & \cdots & \widetilde{\varphi}(t_m^{-1}gt_{m-1}) & \widetilde{\varphi}(t_m^{-1}gt_m)\end{pmatrix}$$

是 G 的一个 $m\times n$ 维复表示 (称为**诱导表示**)，并且 $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G\varphi}=\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi$.

证明思路 利用线性代数的技巧不厌其烦地验证 $\mathrm{Ind}_H^G\varphi$ 是同态即可. 等式 $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G\varphi}=\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi$ 可由 $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G\varphi}(g)=\mathrm{tr}\big(\mathrm{Ind}_H^G\varphi(g)\big)=\sum_{i=1}^m\mathrm{tr}\big(\widetilde{\varphi}(t_i^{-1}gt_i)\big)=\sum_{i=1}^m\widetilde{\chi}_\varphi(t_i^{-1}gt_i)=\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi$ 给出.■

例 考虑 G 的平凡子群 $\{1\}$. 设 χ_1 是 $\{1\}$ 上平凡表示对应的特征标，则 $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G\chi_1(g)=\begin{cases}|G| & g=1\\ 0 & g\neq 1\end{cases}$. 即 $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G\chi_1$ 是 G 正则表示的特征标 (定理 31). 这个例子告诉我们：子群上的不可约特征标诱导到大群之后虽然还是特征标，但不一定是不可约的. 我们很关心这些诱导的特征标何时不可约，而这正是我们要介绍的 Mackey 的工作 (定理 61). 首先引入定义.

定义 57(无交) 两个复表示 φ 和 ψ 称为**无交**，如果它们没有重合的不可约成分 (等价意义下).

命题 58 表示 φ 和 ψ 无交当且仅当 χ_φ 和 χ_ψ 正交.

证明思路 设 $\varphi\sim\bigoplus_{i=1}^s m_i\varphi_i,\psi\sim\bigoplus_{i=1}^s n_i\varphi_i$，则 $\langle\chi_\varphi,\chi_\psi\rangle=\sum_{i=1}^s m_in_i$，其中 m_i,n_i 非负.■

定义 59(双陪集) 设 H,K 是 G 的子群，定义 $H\times K$ 在 G 上的作用为 $(h,k)(g):=hgk^{-1}$. 此时，$g\in G$ 在该作用下的轨道 $HgK=\{hgk:h\in H,k\in K\}$ 称为是 g 的**双陪集**. 记 G 所有双陪集作成的集合为 $H\backslash G/K$. 可以验证，$G=\bigsqcup_{L\in H\backslash G/K}L$；当 H 是 G 的正规子群时，特别地我们有 $H\backslash G/H=G/H$.

定理 60(Mackey) 设 H,K 是 G 的子群，S 为 $H\backslash G/K$ 中每个双陪集各贡献一个代表元作成的集合，则对任意 $f\in Z(L(K))$，等式 $\mathrm{Res}_H^G\,\mathrm{Ind}_K^Gf(x)=\sum_{s\in S}\mathrm{Ind}_{H\cap sKs^{-1}}^H\,\mathrm{Res}_{H\cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}}f(s^{-1}xs)$ 给出了一个从 $Z(L(K))$ 到 $Z(L(H))$ 的映射 $f\mapsto\mathrm{Res}_H^G\,\mathrm{Ind}_K^Gf$.

证明思路 对任意 $s\in S$，设 H 有左陪集分解 $H=\bigsqcup_{v\in V_s}v(H\cap sKs^{-1})$. 此时 $HsK=\bigsqcup_{v\in V_s}vsK$(见 [12]Chapter1.12，习题 8). 记 $T_s:=\{vs:v\in V_s\}$，我们还可以证明 $T:=\bigsqcup_{s\in S}T_s$ 是无交并. 综上我们有 $G=\bigsqcup_{s\in S}HsK=\bigsqcup_{s\in S}\bigsqcup_{v\in V_s}vsK=\bigsqcup_{s\in S}\bigsqcup_{t\in T_s}tK=\bigsqcup_{t\in T}tK$，而右边是 K 的陪集 $tK,t\in T$ 的无交并. 由命题 55，结合代换 $t=vs$，我们有

$$\mathrm{Ind}_K^Gf(x)=\sum_{t\in T}\widetilde{f}(t^{-1}xt)=\sum_{s\in S}\sum_{t\in T_s}\widetilde{f}(t^{-1}xt)=\sum_{s\in S}\sum_{v\in V_s}\widetilde{f}(s^{-1}v^{-1}xvs)=\sum_{s\in S}\sum_{v\in V_s,v^{-1}xv\in sKs^{-1}}f(s^{-1}v^{-1}xvs)$$

$$=\sum_{s\in S}\sum_{v\in V_s,v^{-1}xv\in H\cap sKs^{-1}}\mathrm{Res}_{H\cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}}f(s^{-1}v^{-1}xvs)=\sum_{s\in S}\mathrm{Ind}_{H\cap sKs^{-1}}^H\,\mathrm{Res}_{H\cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}}f(s^{-1}xs).■$$

定理 61(Mackey 不可约准则) 设 H 是 G 的子群，$\varphi:H\to GL(\mathbb{C}^n)$ 是复表示，则 $\mathrm{Ind}_H^G\varphi$ 不可约当且仅当：(1)φ 不可约；(2) 对任意 $s\notin H$，子群 $H\cap sHs^{-1}$ 上的两个表示 $\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^H\varphi$ 和 $\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}}\varphi\big(s^{-1}(\Box)s\big)$ 是无交的.

证明思路 设 G 有双陪集分解 $G=\bigsqcup_{s\in S}HsH$，不失一般性设 $1\in S$. 对单位元 1 而言，$H\cap sHs^{-1}=H,\varphi(s^{-1}\Box s)=\varphi(\Box)$，平凡. 由定理 60 知 $\mathrm{Res}_H^G\,\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi=\chi_\varphi+\sum_{s\in S\backslash\{1\}}\mathrm{Ind}_{H\cap sHs^{-1}}^H\,\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}}\chi_\varphi(s^{-1}\Box s)$(此时 $s\neq 1$). 再根据定理 54，我们有

$$\langle\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi,\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi\rangle=\langle\mathrm{Res}_H^G\,\mathrm{Ind}_H^G\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle=\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle+\sum_{s\in S\backslash\{1\}}\langle\mathrm{Ind}_{H\cap sHs^{-1}}^H\,\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}}\chi_\varphi(s^{-1}\Box s),\chi_\varphi\rangle$$

$$=\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle+\sum_{s\in S\backslash\{1\}}\langle\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}}\chi_\varphi(s^{-1}\Box s),\mathrm{Res}_{H\cap sHs^{-1}}^H\chi_\varphi\rangle.$$

不难发现 $\langle \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi, \mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi \rangle = 1$ 当且仅当 $\langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = 1$，并且对所有 $s \in S \setminus \{1\}$，有

$$\langle \mathrm{Res}_{H \cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}} \chi_\varphi(s^{-1} \square s), \mathrm{Res}_{H \cap sHs^{-1}}^{H} \chi_\varphi \rangle = 0.$$

因此根据推论 29，$\mathrm{Ind}_H^G \chi_\varphi$ 不可约当且仅当 φ 不可约并且 (2) 中所列的两个表示对任意 $s \in S \setminus \{1\}$ 无交 (命题 58). 注意到任意 $s \notin H$ 均可调整 S 的选取使得 $s \in S \setminus \{1\}$，故定理成立.■