2022 年春季学期数学分析 II 期末练习题

(建议时间：180-240 分钟　提交：zhuziyang@cnu.edu.cn)

一、计算题

1. 计算下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{x}}$.

(3) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)^2}$.

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.

2. 设整数 $n \geq 1$，求 $I_n = \int \ln^n x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式.

3. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_1^e \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

4. 利用定积分求极限 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$.

5. 求 $F(x) = \int_x^{x^3} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 的导数.

6. 求两椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 所围公共部分的面积.

7. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

二、论述题

8. 研究下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(\ln n)^p}, p \in \mathbb{R}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{2022}}{(\ln n)^n}$.

9. 设 $p \in \mathbb{R}$. 研究积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(1+x^2)}$ 的收敛性. 若收敛，判断其是条件收敛还是绝对收敛.

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ 的收敛半径和收敛区间，并判断其收敛区间端点处的敛散性.

三、证明题

11. 证明：$1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}$.

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有定义，且对任意整数 $n \geq 1$，存在 $[a,b]$ 上的可积函数 g_n 使得对任意 $x \in [a,b]$ 均有 $|f(x)-g_n(x)| < \frac{1}{n}$. 证明：$f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

13. 设 f 是 $[a,b]$ 上的可积函数. 证明：存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

14. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，若对 $[a,b]$ 上的任意连续函数 g 都有 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$，证明：$f \equiv 0, x \in [a,b]$.

15. 若 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

16. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 在 $x \in [-1,1)$ 收敛，在 $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1)$ 发散. 特别地，该级数在 $x \in (-1,1)$ 时绝对收敛且内闭一致收敛；在 $x = -1$ 时条件收敛.

四、判断题，举反例说明或证明你的结论

17. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 是否能用多项式一致地逼近 f？

18. 是否存在定义在 $[0,1]$ 上的函数列 $\{f_n\}$，其中每个函数都在 $[0,1]$ 上**处处**不连续，但 $\{f_n\}$ 却在 $[0,1]$ 上一致收敛于某个连续函数？

19. 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数列，且 $f_n \rightrightarrows F, n \to \infty$. 设数列 $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = F(x_0)$？